WŁASNOŚCI FUNKCJI

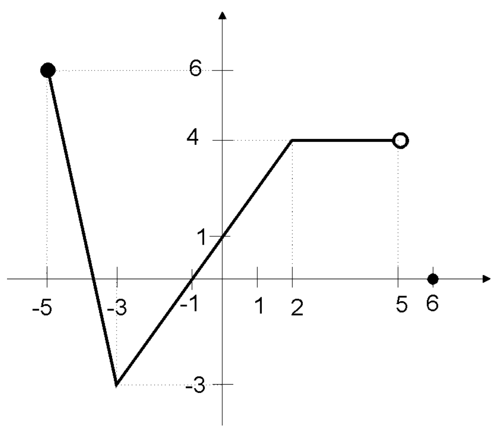
Poziom podstawowy

Zadanie 1 **(3 pkt.)**
Które z przyporządkowań jest funkcją?
a) Każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowana jest jej odwrotność.
b) Każdemu uczniowi klasy pierwszej przyporządkowane są jego oceny okresowe z przedmiotów.
c) Każdemu kwadratowi przyporządkowany jest obwód, który jest liczbą całkowitą dodatnią.
d) Każdej liczbie naturalnej przyporządkowana jest liczba o trzy większa.

Zadanie 2 **(4 pkt.)**
Dana jest funkcja f:{ 1, 2, 3, 4 } → R określona wzorem $f(x) = x + 1$. Podaj określenie tej funkcji za pomocą:
a) grafu;
b) tabeli;
c) opisu słownego;
d) wykresu.

Zadanie 3 **(5 pkt.)**
Funkcję f określono następująco: każdej liczbie ze zbioru X = { -2, -1. $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, 1, 2 } przyporządkowujemy liczbę będącą jej kwadratem.
a) Wyznacz zbiór wartości tej funkcji.
b) Daną funkcję określ za pomocą : tabelki, wzoru, grafu i wykresu.

Zadanie 4 **(9 pkt.)**
Odczytaj z wykresu funkcji f:
a) dziedzinę i zbiór wartości;
b) argumenty dla których funkcja przyjmuje wartości nieujemne;
c) argumenty dla których funkcja przyjmuje wartości większe od 1;
d) przedziały monotoniczności;
e) odczytaj *f(0)*, *f(4)*, *f(7)*;
f) wartość najmniejszą i największą;
g) narysuj wykres funkcji $g(x) = f(x) + 2$;
h) narysuj wykres funkcji $h(x) = f(x-2)$.



Zadanie 5 **(6 pkt.)**

Znajdź dziedzinę funkcji o równaniu: $f(x)=\frac{1}{x^2+x}-\frac{x-1}{x-2}+\sqrt{x+1}$.

Zadanie 6 **(5 pkt.)**

Naszkicuj wykres funkcji spełniający następujące warunki wiedząc, że

a) $D_f=\langle -4;-1)\cup\langle 4;+\infty)$;

b) zbiór wartości $Y=\langle -2;5)$;

c) miejsce zerowe: $x_0=-3$;

d) funkcja rośnie w przedziale $\langle -4;-1)$;

e) funkcja maleje w przedziale $\langle 4;+\infty)$.

Zadanie 7 **(4 pkt.)**

Dana jest funkcja $y=x^2$. Naszkicuj wykres funkcji $g(x)$ jeśli:

a) $g(x)=x^2+3$;

b) $g(x)=(x-2)^2$;

c) $g(x)=(x+1)^2-4$.

Zadanie 8 **(4 pkt.)**

Funkcja określona jest wzorem $f(x)=\begin{cases} x-6 & dla \quad x\geq 5 \\ -x+2 & dla \quad -5\leq x<5 \\ x+5 & dla \quad x<-5 \end{cases}$.

Podaj miejsca zerowe tej funkcji.

Zadanie 9 **(3 pkt.)**

Funkcja dana jest wzorem $f(x)=\frac{x^2-4}{6-3x}$.

a) określ dziedzinę funkcji *f*;

b) wyznacz jej miejsca zerowe.

Zadanie 10 **(4 pkt.)**

Rozważmy zbiór wszystkich prostokątów o obwodzie 40. Funkcja f przyporządkowuje długości jednego boku prostokąta z tego zbioru długość jego drugiego boku:

a) wyznacz dziedzinę tej funkcji;

b) ustal wzór, który opisuje to przyporządkowanie;

c) wyznacz zbiór wartości funkcji.

Zadanie 11 **(5 pkt.)**

Oblicz brakującą współrzędną jeśli, $g(x)=\frac{1}{x+7}-1$ i $A(-6,a)$, $B(b,2)$.

Zadanie 12 **(2 pkt.)**

Punkt C o odciętej 3 należy do wykresu funkcji $f(x)=x^2-3$. Wyznacz rzędną tego punktu.

Zadanie 13 **(3 pkt.)**
Punkt D o rzędnej równej -2 należy do wykresu funkcji $f(x)=x^2+2$. Wyznacz odciętą punktu D.

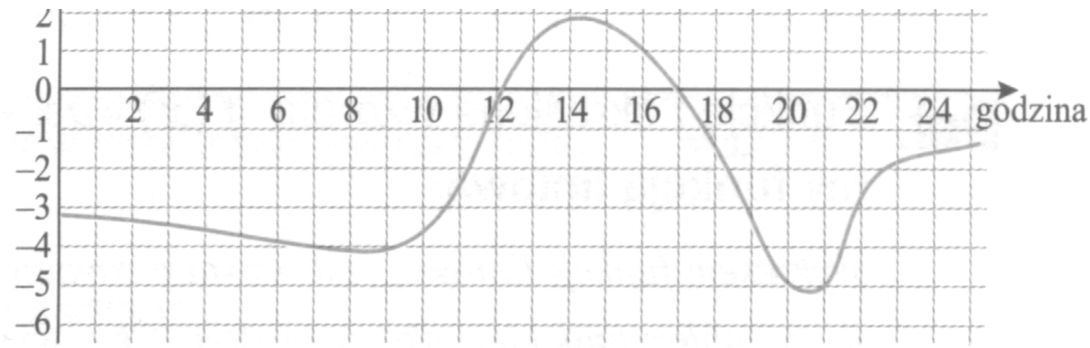
Zadanie 14 **(4 pkt.)**
Rowerzysta wjeżdża pod górę bez pedałowania z prędkością opisaną równaniem: $v(t)=12-1{,}5t$ m/s. Po jakim czasie zatrzyma się? Zilustruj daną sytuację w układzie współrzędnych.

Zadanie 15 **(6 pkt.)**
Basia opuściła schronisko o 7^{00}. W ciągu pierwszych dwóch godzin marszu przeszła 10 km. W trzeciej godzinie wspinała się pod górę i przeszła tylko 3 km. Następnie odpoczywała 45 minut i wyruszyła w dalszą drogę ze średnią prędkością 4 km/h. W południe dotarła do kolejnego schroniska. Narysuj wykres funkcji obrazującej zależność drogi, którą pokonała Basia, od czasu zakładając, że na poszczególnych odcinkach poruszała się ze stałą prędkością. Jaką drogę pokonała Basia od chwili zakończenia odpoczynku?

Zadanie 16 **(4 pkt.)**
Koszt wynajęcia żaglówki Z_1 obliczany jest ze wzoru $Z_1(x)=20x+150$, a żaglówki Z_2 według wzoru $Z_2(x)=15x+200$, gdzie x oznacza liczbę dni. Narysuj wykresy obu funkcji i odpowiedz na pytanie, którą żaglówkę bardziej opłaca się wynająć?

Zadanie 17 **(5 pkt.)**
Całkowity koszt produkcji stołów opisuje funkcja liniowa (zmienna jest liczba wyprodukowanych stołów). Wiedząc, że wyprodukowanie 30 stołów kosztuje 2345 EURO, a 75 stołów kosztuje 4550 EURO, znajdź wzór tej funkcji. Jaka powinna być dziedzina tej funkcji? Jaki jest całkowity koszt wyprodukowania 100 stołów? Ile stołów można wyprodukować dysponując kwotą 2100 EURO?

Zadanie 18 **(6 pkt.)**
Termograf wykreślił przebieg temperatury powietrza. Odczytaj z wykresu:
a) o której godzinie temperatura była najwyższa i podaj jej wartość;
b) o której godzinie temperatura była najniższa i podaj jej wartość;
c) przedziały czasu, w których temperatura rosła;
d) przedziały czasu, w których temperatura malała;
e) przedziały czasu, w których temperatura była dodatnia;
f) o której godzinie temperatura powietrza była równa $0^{o}C$?



Zadanie 19 **(5 pkt.)**

Opłata wstępna w taksówce wynosi 6 zł, a cena przejazdu za 1 km wynosi 1,6 zł.

a) Oblicz ile kilometrów przejechaliśmy, jeśli zapłaciliśmy 25,20 zł.

b) Oblicz, czy 31 zł wystarczy na przejechanie 16 km?

Zadanie 20 **(4 pkt.)**

Wyrażony w tysiącach złotych koszt *C(x)* usuwania *x* procent zanieczyszczeń powietrza powstałych podczas pewnego procesu produkcyjnego wyraża się wzorem:

$$C(x)=\frac{1000x}{0{,}99-x} \qquad x\in\langle 0;99).$$

a) Jaki jest koszt usunięcia 50% zanieczyszczeń?

b) Jaki procent zanieczyszczeń może być usunięty, jeśli dysponujemy kwotą 10 000 złotych?

Zadanie 21 **(8 pkt.)**

Poniższy wykres przedstawia długość kolejki samochodów oczekujących na odprawę celną na jednym z przejść granicznych. Sytuacja ta dotyczy pewnego dnia w godzinach popołudniowych. Wiedząc, że w ciągu godziny odprawia się 20 samochodów, odpowiedz na następujące pytania:

a) co działo się na przejściu granicznym o godzinie 14^{00}

b) w jakim tempie powiększała się kolejka między godziną 14^{00} a 15^{00}

c) co wydarzyło się o godzinie 15^{00}

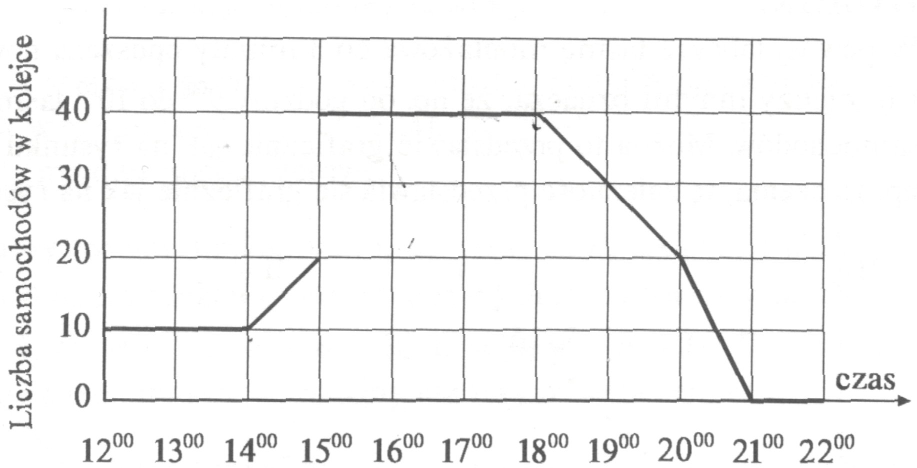
d) ile samochodów dołączyło do kolejki między godziną 16^{00} a 18^{00}

e) pan Nowak dojechał do przejścia granicznego o godzinie 16^{40}. O której godzinie przekroczył granicę

f) co działo się między 18^{00} a 20^{00}

g) co działo się między 20^{00} a 21^{00}

h) co działo się po godzinie 21^{00}?



Zadanie 22 **(8 pkt.)**

Zbiór wartości funkcji $f(x)=\frac{x^2}{x+3}$ możemy wyznaczyć w następujący sposób.

Niech **Z** oznacza zbiór wartości tej funkcji. Wówczas $m\in Z \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+3}=m$,

wtedy $x^2 = m(x+3)$, czyli $x^2 - mx - 3m = 0$ ma co najmniej jedno rozwiązanie. A zatem $x^2 - mx - 3m = 0$ ma co najmniej jedno rozwiązanie różne od –3. Wyróżnik $\Delta = (-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3m) = m^2 + 12m$ przyjmuje wartości dodatnie dla $m \in (-\infty; -12) \cup (0; +\infty)$ i dla tych m równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania. Gdyby dla pewnego m równanie miało rozwiązanie $x_1 = -3$, to x_2 musi być różne od –3.
Jeżeli $m = 0$, to równanie ma postać $x^2 = 0$ i jego rozwiązanie $x = 0$ jest różne od –3.
Jeżeli $m = -12$, to równanie ma postać $x^2 + 12x + 36 = 0$ i jego rozwiązanie $x = 6$ jest różne od –3. A zatem $\mathbf{Z} = (-\infty; -12\rangle \cup \langle 0; +\infty)$.

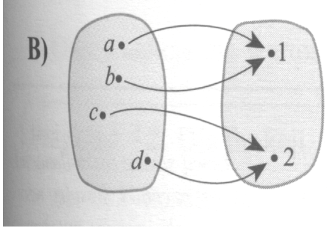
Analogicznie wyznacz zbiór wartości funkcji $g(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$.

Zadanie 23 **(8 pkt.)**
W przykładach A, B, C, D funkcje określono różnymi sposobami. Określ dziedzinę i zbiór wartości każdej z nich:

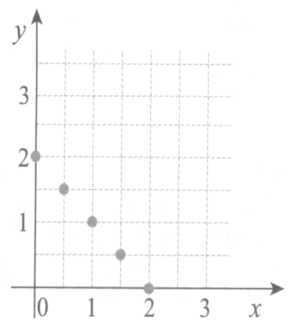
A)

x	–2	–4	0	5
y	7	3	1	0

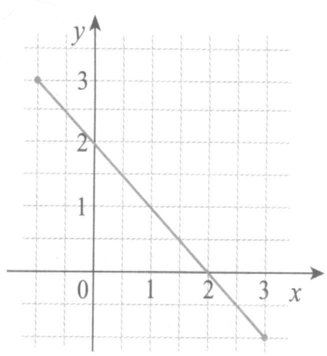
B)



C)

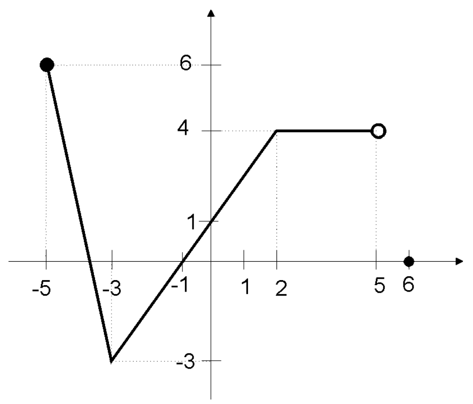


D)



Poziom rozszerzony

Zadanie 1 **(9 pkt.)**
Mając wykres funkcji *f(x)* :



Sporządź wykresy następujących funkcji: $a(x) = -f(x)$, $b(x) = f(-x)$, $c(x) = -f(-x)$, $d(x) = f(x-3) - 1$, $e(x) = 2f(x)$, $g(x) = f(2x)$, $h(x) = f(|x|)$, $i(x) = f(-|x|)$, $j(x) = |f(x)|$.

Zadanie 2 **(7 pkt.)**

Sprawdź, czy funkcja $g(x) = x \cdot \log\frac{3-x}{3+x}$ jest funkcją parzystą.

Zadanie 3 **(6 pkt.)**

Korzystając z definicji funkcji rosnącej wykaż, że funkcja f o równaniu $f(x) = x^3 - 3x + 4$ jest rosnąca w przedziale $\langle 1; +\infty)$.

Zadanie 4 **(11 pkt.)**

Narysuj wykres funkcji o równaniu $f(x) = \max\left\{\frac{1-x}{x-2}, \frac{x+3}{x-2}\right\}$.

Zadanie 5 **(5 pkt.)**

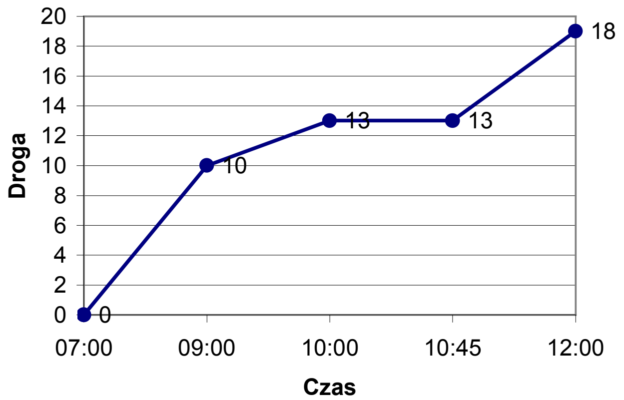
Dana jest funkcja o równaniu $f(x) = x^2 - 3$. Oblicz miejsca zerowe funkcji $g(x) = f(f(x)) - 1$.

SCHEMAT PUNKTOWANIA – WŁASNOŚCI FUNKCJI

Poziom podstawowy

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania	L. pkt.
1	Stwierdzenie, że przyporządkowanie a) jest funkcją.	1
	Stwierdzenie, że przyporządkowanie c) jest funkcją.	1
	Stwierdzenie, że przyporządkowanie d) jest funkcją.	1
2	Określenie funkcji za pomocą grafu.	1
	Określenie funkcji za pomocą tabeli.	1
	Określenie funkcji za pomocą opisu słownego.	1
	Określenie funkcji za pomocą wykresu.	1
3	Wyznaczenie zbioru wartości funkcji $\{\ 0,\ \frac{1}{4},\ 1,\ 4\ \}$	1
	Przedstawienie wykresu funkcji za pomocą tabelki, wzoru, grafu i wykresu	4
4	Wyznaczenie dziedziny i zbioru wartości: $D: x \in \langle -5;5) \cup \{6\}$, $ZWF: y \in \langle -3,6 \rangle$.	2
	Wyznaczenie argumentów dla których funkcja przyjmuje wartości nieujemne $x \in \left\langle -5;-3\frac{1}{2} \right\rangle \cup \langle -1;5) \cup \{6\}$.	1
	Wyznaczenie argumentów dla których funkcja przyjmuje wartości większe od 1. Odp. $x \in \langle -5;-4) \cup (0,5)$.	1
	Podanie przedziałów monotoniczności: dla $x \in (-5,-3)$ funkcja malejąca, dla $x \in (-3,2)$ funkcja rosnąca, dla $x \in (2,5)$ funkcja stała.	1
	Wyznaczenie wartości dla podanych argumentów: $f(0)=1$, $f(4)=4$, $f(7)$ nie istnieje.	1
	Wyznaczenie wartości najmniejszej i największej: wartość największa $M=6$ dla $x=-5$, wartość najmniejsza $m=-3$ dla $x=-3$.	1
	Narysowanie wykresu funkcji *g(x)*.	1
	Narysowanie wykresu funkcji *h(x)*.	1
5	Zapisanie warunków: $\begin{cases} x^2+x \neq 0 \\ x-2 \neq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$.	3
	Rozwiązanie układu warunków $\begin{cases} x \neq -1 \wedge x \neq 0 \\ x \neq 2 \\ x \geq -1 \end{cases}$.	2
	Podanie dziedziny funkcji $D: x \in (-1,\infty) \setminus \{0,2\}$.	1
6	Sporządzenie wykresu spełniającego wyżej wymienione warunki. Za każdy spełniony warunek po 1 pkt.	5

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania	L. pkt.
7	Narysowanie wykresu $y = x^2$.	1
	Narysowanie wykresu a)	1
	Narysowanie wykresu b)	1
	Narysowanie wykresu c)	1
8	Podanie miejsca zerowego dla $x \geq 5$: $x = 6 \quad i \quad x \in D$.	1
	Podanie miejsca zerowego dla $-5 \leq x < 5$: $x = 2 \quad i \quad x \in D$.	1
	Podanie miejsca zerowego dla $x < -5$: $x = -5 \quad i \quad x \notin D$.	1
	Podanie miejsc zerowych funkcji: $x_0 \in \{2,6\}$.	1
9	Określenie dziedziny funkcji $D = R \setminus \{2\}$.	1
	Rozwiązanie równania $x^2 - 4 = 0$. Odp.: $x = -2$ lub $x = 2$.	1
	Podanie miejsca zerowego $x_0 = -2$.	1
10	Analiza zadania	1
	Określenie dziedziny funkcji $D = (0,20)$.	1
	Podanie wzoru $y = 20 - x$.	1
	Wyznaczenie zbioru wartości funkcji: $ZWf = (0,20)$.	1
11	Ułożenie równania $a = g(-6)$.	1
	Obliczenie $a = 0$.	1
	Ułożenie równania $\frac{1}{b+7} - 1 = 2$.	1
	Rozwiązanie równania $b = -6\frac{2}{3}$.	2
12	Ułożenie równania: $y = f(3)$.	1
	Wyznaczenie rzędnej $y = 6$.	1
13	Ułożenie równania $y = -2$.	1
	Wyznaczenie $x^2 = -4$.	1
	Podanie, że nie istnieje taka odcięta.	1
14	Zapisanie równania $v(t) = 0$.	1
	Wyznaczenie $t = 8$.	1
	Sporządzenie wykresu funkcji z uwzględnieniem dziedziny.	2
15	Obliczenie jaki odcinek drogi przeszła po odpoczynku: 6 km.	2
	Sporządzenie wykresu. Za każdy prawidłowo zaznaczony etap po 1 pkt.	4



Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania	L. pkt.
16	Narysowanie wykresu funkcji $Z_1(x)$.	1
	Narysowanie wykresu funkcji $Z_2(x)$.	1
	Sformułowanie odpowiedzi: do 10 dni opłaca się wynająć żaglówkę Z_1, powyżej 10 dni żaglówkę Z_2.	2
17	Podanie wzoru funkcji $f(x) = 49x + 875$.	2
	Określenie dziedziny funkcji: $D = N$.	1
	Obliczenie $f(100) = 5775$.	1
	Obliczenie $f(x) = 2100$. Odp.: $x = 25$.	1
18	Sformułowanie odpowiedzi a) Najwyższa temperatura była o godz.14 i wynosiła $2^\circ C$.	1
	Sformułowanie odpowiedzi b) Najniższa temperatura była o godz. 20^{30} i wynosiła nieco więcej niż $-5^\circ C$.	1
	Sformułowanie odpowiedzi c) Temperatura rosła od godz. 9 do godz.14 i od 20^{30}	1
	Sformułowanie odpowiedzi d) Temperatura malała od północy do godz. 9 i od godz. 14 do godz. 20^{30}	1
	Sformułowanie odpowiedzi e) Temperatura była dodatnia od godz. 12 do godz. 17.	1
	Sformułowanie odpowiedzi f) Temperatura była zerowa o godz. 12 i o godz. 17.	1
19	Napisanie wzoru funkcji opisującej zależność $y = 6 + 1{,}6x$.	1
	Obliczenie ile kilometrów przejechaliśmy $x = 12$. Za ułożenie odpowiedniego równania prowadzącego do otrzymania rozwiązania 1 pkt.	2
	Obliczenie $f(16) = 31{,}6$.	1
	Sformułowanie odpowiedzi: Nie wystarczy.	1
20	Obliczenie $C(0{,}5) = \dfrac{1000 \cdot 0{,}5}{0{,}99 - 0{,}5} \approx 1020{,}41$.	1
	Ułożenie równania: $10000 = \dfrac{1000x}{0{,}99 - x} \qquad x \in < 0;99)$.	1
	Rozwiązanie równania $x = 0{,}9$.	1
	Sformułowanie odpowiedzi 90%.	1
21	O godzinie 14 liczba samochodów nowo przybyłych na przejście graniczne oraz odprawianych była taka sama i wynosiła 1 samochód/ 3 minuty.	1
	Między godziną 14 a 15 kolejka zwiększyła się o 10 samochodów	1
	O godzinie 15 przyjechało 20 samochód.	1
	Między godziną 16 a 18 liczba samochodów w kolejce nie uległa zamianie	1
	Pan Nowak był 40 w kolejce, a skoro 20 samochodów jest odprawianych na godzinę, oznacza to, że granicę przekroczy za 2 godziny, czyli o 18^{40}.	1
	Między 18 a 20 liczba samochodów w kolejce spadła o 20 samochodów (o 10 na godzinę), czyli odprawianych było 2 samochody co 6 minut, a do przejścia dojeżdżał tylko jeden nowy samochód.	1
	Między 20 a 21 kolejka oczekujących stopniała do 0, czyli w przeciągu tej godziny odprawiono 20 samochodów, a w tym czasie nie dojechał żaden nowy.	1
	Po godzinie 21 samochody odprawiano na bieżąco lub nie odprawiano w ogóle.	1

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania	L. pkt.
22	Ułożenie równania, kiedy *g(x)* ma co najmniej jedno rozwiązanie $x \quad - mx + 2m = 0$.	1
	Obliczenie wyróżnika $\Delta = m^2 - 8m$.	1
	Obliczenie miejsc zerowych wyróżnika $m_1 = 0, \quad m_2 = 8$.	1
	Określenie, kiedy wyróżnik przyjmuje wartości dodatnie m $m \in (-\infty; 0) \cup (8; +\infty)$.	2
	Rozwiązanie równania dla $m = 0, \quad x = 0$.	1
	Rozwiązanie równania dla $m = 8, \quad x = 4$.	1
	Podanie zbioru wartości **Z** = (- ∞ ,0> ∪ <8, + ∞).	1
23	Określenie dziedziny i zbioru wartości a): $D = \{-4, -2, 0, 5\}, \quad ZWf = \{0, 1, 3, 7\}$.	2
	Określenie dziedziny i zbioru wartości b): $D = \{a, b, c, d\}, \quad ZWf = \{1, 2\}$.	2
	Określenie dziedziny i zbioru wartości c): $D = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2\right\}, \quad ZWf = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2\right\}$.	2
	Określenie dziedziny i zbioru wartości d): $D = \langle -1, 3 \rangle, \quad ZWf = \langle -1, 3 \rangle$.	2

Poziom rozszerzony

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania	L. pkt.
1	Za sporządzanie odpowiedniego wykresu funkcji po 1 pkt.	9
2	Ustalenie warunków: $\begin{cases} 3 + x \neq 0 \\ \dfrac{3 - x}{3 + x} > 0 \end{cases}$.	1
	Wyznaczenie dziedziny: $D_g : x \in (-3; 3)$.	2
	Zapisanie wyrażenia $g(-x) = -x \cdot \log \frac{3 + x}{3 - x}$, gdzie $-x \in D_g$.	1
	Przekształcenie wyrażenia $g(-x) = -x \cdot \log \frac{3 + x}{3 - x} = x \cdot \log \left(\frac{3 + x}{3 - x} \right)^{-1} = x \cdot \log \frac{3 - x}{3 + x}$.	2
	Sformułowanie odpowiedzi: jeśli $g(x) = g(-x) \Rightarrow$ funkcja ta jest parzysta.	1
3	Podanie założenia: $x_1 \in \langle 1; +\infty)$ i $x_2 \in \langle 1; +\infty)$ oraz $x_1 < x_2$ to $x_1 - x_2 < 0$.	1
	Obliczenie $f(x_1) = x_1^3 - 3x_1 + 4$ i $f(x_2) = x_2^3 - 3x_2 + 4$.	1
	Wyznaczenie $f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 - 3x_1 - x_2^3 + 3x_2$.	1
	Sprowadzenie różnicy do postaci iloczynowej: $f(x_1) - f(x_2) = (x_1^3 - x_2^3) - 3(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + x_2^2) - 3(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + x_2^2 - 3)$.	1

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania	L. pkt.
3	Wykorzystanie założenia do określenia znaku różnicy $f(x_1) - f(x_2) > 0$.	1
	Uzasadnienie, że jest to funkcja rosnąca.	1
4	Zapisanie wzoru funkcji f wykorzystując określenie warunków: $f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{x-2} & dla \quad \frac{1-x}{x-2} \langle \frac{x+3}{x-2} \quad (1) \\ \frac{1-x}{x-2} & dla \quad \frac{1-x}{x-2} \geq \frac{x+3}{x-2} \quad (2) \end{cases}$.	2
	Rozwiązanie warunku 1) $x \in (-\infty;-1) \cup (2;+\infty)$.	2
	Rozwiązanie warunku 2) $x \in \langle -1;2)$.	2
	Zapisanie wzoru funkcji $f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{x-2}, \ x \in \langle -1,2) \\ \frac{x+3}{x-2}, \ x \in (-\infty,-1) \cup (2,\infty) \end{cases}$.	1
	Narysowanie wykresu dla $x \in \langle -1;2)$.	2
	Narysowanie wykresu dla $x \in (-\infty;-1) \cup (2;+\infty)$.	2
5	Wyznaczenie funkcji $g(x) = x^4 - 6x^2 + 5$.	1
	Podstawienie $x^2 = t$, gdzie $t \geq 0$ i sprowadzenie równania do postaci $t^2 - 6t + 5 = 0$.	1
	Obliczenie miejsc zerowych równania kwadratowego: $t_1 = 1$, $t_2 = 5$.	1
	Podanie miejsc zerowych funkcji $f(x)$: -$\sqrt{5}$, -1, 1, $\sqrt{5}$.	2