

WIELOMIANY

Poziom podstawowy

Zadanie 1 (5 pkt.)

Liczba -7 jest miejscem zerowym $W(x)$. Wyznacz resztę z dzielenia tego wielomianu przez wielomian $P(x) = x^2 + 5x - 14$, jeśli wiadomo, że w wyniku dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $(x - 2)$ otrzymujemy resztę 18.

Zadanie 2 (4 pkt.)

Miejsce zerowe funkcji $f(x) = x^3 - 3x + 2$ możemy obliczyć następująco:

$$x^3 - 3x + 2 = 0$$

$$x^3 - x - 2x + 2 = 0$$

$$x(x^2 - 1) - 2(x - 1) = 0$$

$$x(x - 1)(x + 1) - 2(x - 1) = 0$$

$$(x - 1)[x(x + 1) - 2] = 0$$

$$(x - 1)(x^2 + x - 2) = 0$$

$$x = 1 \quad \text{lub} \quad x = -2 \quad \text{lub} \quad x = 1.$$

Miejscami zerowymi funkcji są liczby -2 oraz 1 .

Postępując podobnie, oblicz miejsca zerowe funkcji $g(x) = x^3 - 7x + 6$.

Zadanie 3 (8 pkt.)

Wiedząc, że wielomian $W(x) = -x^3 + (a + 1)x^2 + (8a - 3)x - 15$ jest podzielny przez dwumian $(x - 1)$ wyznacz:

- wartość parametru a ,
- rozkład wielomianu na czynniki liniowe,
- zbiór rozwiązań nierówności $W(x) < 0$.

Zadanie 4 (4 pkt.)

Rozwiąż nierówność $x^3 + 2x^2 \geq 4x + 8$, a następnie wskaż najmniejszą liczbę całkowitą spełniającą tę nierówność (o ile taka istnieje).

Zadanie 5 (2 pkt.)

Rozwiąż równanie $x^4 - 3x^3 - x + 3 = 0$.

Zadanie 6 (3 pkt.)

Wyznacz współczynniki a i b tak, aby wielomian $W(x) = x^4 - 3x^3 + ax^2 + bx + a$ był podzielny przez $x^2 - 1$.

Zadanie 7 (2 pkt.)

Rozwiąż równanie $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$, rozkładając jego lewą stronę na czynniki metodą grupowania wyrazów i wyłączania wspólnego czynnika przed nawias.

Zadanie 8 (3 pkt.)

Sprawdź, czy $x_1 = -1$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ jeśli tak, to wyznacz pozostałe pierwiastki tego wielomianu.

Zadanie 9 (5 pkt.)

Aby rozłożyć wielomian $W(x) = x^3 + x^2 + 6x + 36$, na czynniki możemy postąpić w następujący sposób:

1. Zauważmy, że $36 = 27 + 9 = 3^3 + 3^2$.
2. Zapisujemy wielomian $W(x)$ w postaci $W(x) = x^3 + 3^3 + x^2 + 6x + 3^2$.
3. Ponieważ $x^3 + 3^3 = (x+3)(x^2 - 3x + 9)$ oraz $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$, więc
 $W(x) = (x+3)(x^2 - 3x + 9) + (x+3)^2 = (x+3)(x^2 - 3x + 9 + x + 3) = (x+3)(x^2 - 2x + 12)$
4. Wyróżnik trójmianu $x^2 - 2x + 12$ to $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 12 = 4 - 48$, $\Delta < 0$. Stąd $x^2 - 2x + 12$ nie rozkłada się na czynniki.
5. $(x+3)(x^2 - 2x + 12)$ stanowi ostateczny rozkład wielomianu $W(x)$ na czynniki.

Stosując analogiczne przekształcenia, rozłóż na czynniki wielomian $W(x) = x^3 + x^2 + 10x + 150$.

Zadanie 10 (4 pkt.)

Ustal, czy między zbiorami A i B zachodzi zależność $A \subset B, B \subset A$ czy $A = B$, jeśli:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = 0\}, B = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0\}.$$

Zadanie 11 (6 pkt.)

Dany jest wielomian $W(x)$. Wyznacz zbiory:
 $A = \{x \in \mathbb{R} : W(x) = 0\}, B = \{x \in \mathbb{R} : W(x) > 0\}, C = \{x \in \mathbb{R} : W(x) \leq 0\}$,
jeśli $W(x) = -x^4 + 7x^2 - 12$.

Zadanie 12 (5 pkt.)

Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^3 + 6x^2 - 11x + 6}}$.

Zadanie 13 (6 pkt.)

Wyznacz dziedzinę i miejsca zerowe funkcji $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 7x + 6}$.

Poziom rozszerzony

Zadanie 1 (6 pkt.)

Wyznacz wartości a , b , c , tak aby wielomiany $W(x) = a(x-1)(x+1) + b(x-2)(x+2) + c(x-1)(x+2)$ i $P(x) = 3x^2 + x - 7$ były równe.

Zadanie 2 (7 pkt.)

Wielomian $W(x)$ jest stopnia trzeciego. Wiadomo, że $W(0) = -1$, $W(-1) = -5$, $W(2) = 1$, $W(1) = -1$. Wyznacz wielomian $W(x)$.

Zadanie 3 (8 pkt.)

Liczba 2 jest dwukrotnym pierwiastkiem $W(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + 20x - 4$. Wyznacz a i b . Dla wyznaczonych a i b rozłóż ten wielomian na czynniki.

Zadanie 4 (8 pkt.)

Wielomian $W(x)$ przy dzieleniu przez $x-1$, $x-2$, $x-3$ daje odpowiednio reszty 1, 2, 3. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez iloczyn $(x-1)(x-2)(x-3)$.

Zadanie 5 (3 pkt.)

Dany jest wielomian $W(x) = x^4 - (k-1)(k+1)x^3 + (k+1)^2x^2 - 3(k-1)x - 5$. Dla jakich k reszta z dzielenia tego wielomianu przez dwumian $x-1$ wynosi 2?

Zadanie 6 (3 pkt.)

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian Q określony wzorem $Q(x) = x^4 + x^3 - x - 1$ wynosi $x^3 + x^2 + x + 2$. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $x^2 - 1$.

SCHEMAT PUNKTOWANIA – WIELOMIANY

Poziom podstawowy

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
1	Zapisanie warunków zadania: $\begin{cases} W(-7) = 0 \\ W(2) = 18 \end{cases}$	2
	Określenie jakiej postaci jest reszta: $R(x) = ax + b$	1
	Ułożenie układu równań i jego rozwiązanie: $\begin{cases} -7a + b = 0 \\ 2a + b = 18 \end{cases}$ $a = 2, \quad b = 14.$	2
2	Doprowadzenie do postaci: $x^3 - x - 6x + 6 = 0.$	1
	Sprowadzenie równania do postaci iloczynowej: $(x - 1)(x^2 + x - 6) = 0.$	1
	Wyznaczenie miejsc zerowych: -3, 1, 2.	2
3	Obliczenie $W(1) = 9a - 18.$	1
	Wyznaczenie a : $W(1) = 0 \Rightarrow a = 2.$	1
	Zapisanie wielomianu $W(x) = -x^3 + 3x^2 + 13x - 15.$	1
	Wykonanie dzielenia $-x^3 + 3x^2 + 13x - 15 : (x - 1),$ $-x^2 + 2x + 15.$	1
	Znalezienie pierwiastków trójmianu kwadratowego: -3, 5.	1
	Rozłożenie $W(x)$ na czynniki: $W(x) = -(x - 5)(x - 1)(x + 3).$	1
	Podanie zbioru rozwiązań nierówności: $x \in (-3, -1) \cup (5, +\infty).$	2
4	Przekształcenie nierówności do postaci $(x + 2)^2(x - 2) \geq 0.$	1
	Odczytanie miejsc zerowych: -2, 2.	1
	Podanie zbioru rozwiązań nierówności: $x \in \langle 2, +\infty \rangle \cup \{-2\}.$	2
5	Doprowadzenie równania do postaci iloczynowej: $(x - 3)(x^3 - 1) = 0.$	1
	Podanie rozwiązań równania: 1, 3.	1
6	Zapisanie warunków: $W(1) = 0 \quad \wedge \quad W(-1) = 0.$	1
	Zapisanie układu równań: $\begin{cases} 2a + b - 2 = 0 \\ 2a - b + 4 = 0 \end{cases}$	1
	Rozwiązanie układu równań: $a = 0, \quad 5, \quad b = 3.$	1
7	Doprowadzenie równania do postaci iloczynowej: $(x - 2)(x^2 + 1) = 0.$	1
	Podanie rozwiązań równania: 2.	1
8	Sprawdzenie, czy liczba -1 jest pierwiastkiem wielomianu; tak.	1
	Wykonanie dzielenia $(x^3 - 4x^2 + x + 6) : (x + 1).$ Odp.: $x^2 - 5x + 6.$	1
	Wyznaczenie pierwiastków trójmianu kwadratowego, które są pozostałymi pierwiastkami $W(x)$: 2, 3.	1

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
9	Zauważenie, że $150 = 5^3 + 5^2$.	1
	Zapisanie $W(x)$ w postaci $W(x) = x^3 + 5^3 + 10x + 5^2$.	1
	Doprowadzenie równania do postaci: $(x+5)(x^2 - 4x + 30)$.	1
	Obliczenie wyróżnika trójmianu kwadratowego, $\Delta < 0$.	1
	Stwierdzenie, że rozkład $W(x)$ na czynniki to $W(x) = (x+5)(x^2 - 4x + 30)$.	1
10	Wyznaczenie zbioru A : -1, 1.	1
	Wyznaczenie zbioru B : -1, 1, 4.	2
	Podanie odpowiedzi: $A \subset B$.	1
11	Zapisanie warunku $x^2 = t, t \geq 0$.	1
	Zapisanie i rozwiązanie równania $-t^2 + 7t - 12 = 0$; Odp.: 3, 4.	1
	Wyznaczenie zbioru $A = \{-\sqrt{3}, -2, 2, \sqrt{3}\}$.	1
	Narysowanie wykresu wielomianu.	1
	Wyznaczenie zbioru B : $x \in (-2, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 2)$.	1
	Wyznaczenie zbioru C : $x \in (-\infty, -2) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (2, +\infty)$.	1
12	Zapisanie warunku: $-x^3 + 6x^2 - 11x + 6 > 0$.	1
	Znalezienie jednego z pierwiastków całkowitych: 1, 2, 3.	1
	Wykonanie dzielenia wielomianu przez $(x-1)$ lub $(x-2)$ lub $(x-3)$.	1
	Znalezienie pierwiastków: 1, 2, 3.	1
	Sporządzenie wykresu wielomianu i podanie odpowiedzi	1
	$D_f : x \in (-\infty, 1) \cup (2, 3)$.	
13	Zapisanie warunku: $x^2 - 7x + 6 \neq 0$.	1
	Zapisanie dziedziny funkcji: $D_f : x \in \mathbb{R} - \{1, 6\}$.	1
	Zapisanie równania $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$.	1
	Rozłożenie wielomianu na czynniki $(x-1)(x+1)(x-2) = 0$.	1
	Wyznaczenie pierwiastków wielomianu: -1, 1, 2.	1
	Określenie miejsc zerowych funkcji: $\{-1, 2\}$.	

Poziom rozszerzony

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
1	Opuszczenie nawiasów wielomianu $W(x)$.	1
	Redukcja wyrazów podobnych $W(x) = (a + b + c)x^2 + cx - a - 4b - 2c$.	1
	Porównanie stopni i ułożenie układu równań: $\begin{cases} a + b + c = 3 \\ c = 1 \\ -a - 4b - 2c = -7 \end{cases}$	2
	Rozwiązanie układu równań: $a = 1, b = 1, c = 1$.	2
2	Zapisanie $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.	1
	Ułożenie układu równań: $\begin{cases} d = -1 \\ -a + b - c + d = -1 \\ a + b + c = 1 \\ 8a + 4b + 2c + d = 1 \end{cases}$	2
	Rozwiązanie układu: $a = 1, b = -2, c = 1, d = -1$.	3
	Wyznaczenie wielomianu: $W(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$.	1
3	Zauważenie, że $(x - 2)^2 W(x)$	1
	Wykonanie dzielenia.	2
	Zapisanie reszty $R(x) = (12a + 4b + 52)x - 16a - 4b - 52$.	1
	Ułożenie układu równań: $\begin{cases} 12a + 4b + 52 = 0 \\ -16a - 4b - 52 = 0 \end{cases}$	1
	Rozwiązanie układu równań: $a = 0, b = -13$.	1
	Rozłożenie $W(x)$ na czynniki: $(x - 2)^2(x + 2 - \sqrt{5})(x + 2 + \sqrt{5})$.	2
4	Zapisanie jakiej postaci jest reszta: $R(x) = ax^2 + bx + c$.	1
	Ułożenie układu równań: $\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 2 \\ 9a + 3b + c = 3 \end{cases}$	3
	Rozwiązanie układu równań: $a = 2, b = -7, c = 6$.	3
	Zapisanie reszty $R(x) = 2x^2 - 7x + 6$.	1
5	Obliczenie $W(1) = -k - 1$.	1
	Ułożenie równania $W(1) = 2$.	1
	Rozwiązanie równania i podanie odpowiedzi: $k = -3$.	1
6	Zauważenie, że reszta z dzielenia W przez $x^2 - 1$ jest równa reszcie z dzielenia $x^3 + x^2 + x + 2$ przez $x^2 - 1$.	1
	Wykonanie dzielenia.	1
	Podanie reszty $R(x) = 2x + 3$.	1