

PLANIMETRIA

Poziom podstawowy

Zadanie 1 (3 pkt.)

W prostokątnym trójkącie ABC dana jest długość przyprostokątnej $|AC|=3$. Na przeciwprostokątnej AB wybrano punkt D , a na przyprostokątnej BC punkt E w taki sposób, że $|DE| \parallel |AC|$ oraz $|BE|=|EC|=2$. Wykonaj rysunek ilustrujący sytuację opisaną w zadaniu i wyznacz tangens kąta EDC .

Zadanie 2 (3 pkt.)

W prostokątnym trójkącie ABC dana jest długość przyprostokątnej $|AC|=4$. Na przeciwprostokątnej AB wybrano punkt D , a na przyprostokątnej BC punkt E w taki sposób, że $DE \parallel AC$ oraz $|BE|=4$, $|EC|=3$. Wykonaj rysunek ilustrujący sytuację opisaną w zadaniu i wyznacz tangens kąta ECD .

Zadanie 3 (5 pkt.)

Dany jest trójkąt ABC , w którym $|BC|=4$, miara kąta CAB jest równa 30° , a miara kąta ABC jest równa 45° . Oblicz pole trójkąta ABC .

Zadanie 4. (3 pkt.)

W wycinek koła o promieniu 3 cm wpisano koło o promieniu 1 cm . Oblicz pole danego wycinka koła.

Zadanie 5 (3 pkt.)

Znajdź długość promienia koła wpisanego w romb o polu S i kącie ostrym α .

Zadanie 6 (4 pkt.)

Na trójkącie równobocznym opisano okrąg i wpisano weń okrąg. Pole powstałego pierścienia kołowego jest równe 3π . Oblicz pole trójkąta.

Zadanie 7 (5 pkt.)

Promień okręgu wpisanego w trapez prostokątny ma długość r . Kąt ostry trapezu jest równy α . Oblicz obwód i pole trapezu.

Zadanie 8 (3 pkt.)

Wykaż, że trójkąt ABC , w którym kąt przy wierzchołku B jest dwa razy większy od kąta przy wierzchołku A , kąt przy wierzchołku C jest trzy razy większy od kąta przy wierzchołku A , jest trójkątem prostokątnym.

Zadanie 9 (3 pkt.)

W celu oszacowania wysokości drzewa uczeń o wzroście 180 cm ustawił się tak, że koniec jego cienia pokrywał się z końcem drzewa. Wiedząc, że odległość ucznia od źródła światła wynosi $3,4\text{ m}$ i odległość ucznia od pnia drzewa wynosi $16,6\text{ m}$, oblicz wysokość drzewa.

Zadanie 10 (6 pkt.)

W trapezie równoramiennym dane jest ramię długości a i kąt ostry α . Przekątna trapezu jest prostopadła do ramienia. Oblicz pole trapezu.

Zadanie 11 (6 pkt.)

Ze skrawka materiału w kształcie trójkąta o długościach boków 7 cm , 24 cm , 25 cm wycięto koło weń wpisane. Ile cm^2 materiału zostało? Wynik podaj z dokładnością 0,01.

Poziom rozszerzony**Zadanie 1 (5 pkt.)**

Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AB| = 6$, a wysokość opuszczona z wierzchołka C ma długość 5. Na boku AC wybrano punkt E taki, że $\frac{|CE|}{|CA|} = \frac{1}{3}$, natomiast na boku BC wybrano punkt F taki, że $\frac{|CF|}{|CB|} = \frac{1}{4}$. Oblicz pole trójkąta CEF .

Zadanie 2 (7 pkt.)

W trapezie równoramiennym $ABCD$, o podstawach AB i CD , kąt ostry ma miarę 45° . Przekątna AC o długości 6 tworzy z ramieniem trapezu kąt o mierze 120° . Oblicz pole trapezu $ABCD$.

Zadanie 3 (4 pkt.)

W równoległoboku przekątne mają długości równe 4 cm i 6 cm , a kąt między nimi ma miarę równą 150° . Oblicz długości boków tego równoległoboku.

Zadanie 4 (3 pkt.)

W trójkącie ABC dane są długości boków $|AC| = 6$, $|BC| = 8$ i miara kąta ACB , która jest równa 60° . W trójkącie DEF dane są długości boków $|DF| = 8\sqrt{2}$, $|FE| = 2\sqrt{26}$ oraz $\cos|\angle DFE| = \frac{5\sqrt{13}}{26}$. Wykaż że trójkąty ABC i DEF są podobne.

Zadanie 5 (6 pkt.)

Dany jest trójkąt ABC , w którym $|BC| = 8$, $|CA| = 4$, a miara kąta ACB jest równa 120° . Punkt D jest punktem wspólnym dwusiecznej kąta ACB i boku AB . Oblicz długość odcinka CD .

Zadanie 6 (11 pkt.)

Długości ramion trapezu są równe 5 cm i 3 cm . Odcinek łączący środki tych ramion dzieli trapez na dwie części w ten sposób, że stosunek ich pól równy jest $\frac{5}{11}$. Oblicz pole danego trapezu, wiedząc, że można wpisać w niego okrąg.

Zadanie 7 (5 pkt.)

Oblicz pole trójkąta mając dane: $a = 4\text{ cm}$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$. Podaj dokładny wynik.

SCHEMAT PUNKTOWANIA - PLANIMETRIA
Poziom podstawowy

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania	L. pkt.
1	Wykonanie rysunku i przyjęcie potrzebnych oznaczeń.	1
	Obliczenie długości odcinka ED: $ ED = \frac{3}{2}$.	1
	Obliczenie tangensa kąta EDC: $\operatorname{tg} \angle EDC = \frac{4}{3}$.	1
2	Wykonanie rysunku i przyjęcie potrzebnych oznaczeń.	1
	Obliczenie długości odcinka ED: $ ED = \frac{16}{7}$.	1
	Obliczenie tangensa kąta ECD: $\operatorname{tg} \angle ECD = \frac{16}{21}$.	1
3	Wykonanie rysunku i przyjęcie potrzebnych oznaczeń. CD wysokość trójkąta opuszczona na bok AB .	1
	Obliczenie długości odcinka CD : $ CD = CB \cdot \sin 45^\circ = 2\sqrt{2}$.	1
	Obliczenie długości odcinka DB : $ DB = CB \cdot \cos 45^\circ = 2\sqrt{2}$.	1
	Obliczenie długości odcinka AD : $ AD = CD \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ = 2\sqrt{6}$.	1
	Obliczenie długości odcinka AB : $ AB = 2(\sqrt{2} - \sqrt{6})$ i pole trójkąta: $P_\Delta = 4(1 + \sqrt{3})$.	1
4	Sporządzenie rysunku i przyjęcie oznaczeń.	1
	Wyznaczenia miary kąta danego wycinka $\alpha = 60^\circ$.	1
	Obliczenie pola wycinka $P = 1,5\pi \text{ cm}^2$.	1
5	Sporządzenie rysunku i przyjęcie oznaczeń.	1
	Obliczenie długości boku rombu (podstawy) $a = \frac{h}{\sin \alpha}$.	1
	Obliczenie długości promienia $r = 0,5\sqrt{S \sin \alpha}$.	1
6	Sporządzenie rysunku i przyjęcie oznaczeń.	1
	Określenie długości promienia okręgu wpisanego i opisanego w zależności od wysokości trójkąta $r = \frac{1}{3}h$, $R = \frac{2}{3}h$.	1
	Wyznaczenie wysokości trójkąta z tw. Pitagorasa $h=3$.	1
	Wyznaczenie długości boku trójkąta $a = 2\sqrt{3}$ oraz obliczenie pola trójkąta $P = 3\sqrt{3}$.	1
7	Sporządzenie rysunku i przyjęcie oznaczeń.	1
	Wyznaczenie długości ramienia trapezu $c = \frac{2r}{\sin \alpha}$.	1

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania	L. pkt.
7	Wyznaczenie sumy długości podstaw z warunku $a + b = h + c$ czyli $a + b = 2r + \frac{2r}{\sin \alpha}$.	1
	Obliczenie pola trapezu $P = 2r^2 \left(1 + \frac{1}{\sin \alpha} \right)$.	1
	Obliczenie obwodu trapezu $Ob = 4r \left(1 + \frac{1}{\sin \alpha} \right)$.	1
8	Sporządzenie rysunku i przyjęcie oznaczeń.	1
	Wyznaczenie miary kąta α , $\alpha = 30^\circ$.	1
	Wyznaczenie miary pozostałych kątów trójkąta: $2\alpha = 60^\circ$, $3\alpha = 90^\circ$ i udzielenia odpowiedzi.	1
9	Sporządzenie rysunku i przyjęcie oznaczeń.	1
	Zapisanie odpowiedniej proporcji z podobieństwa trójkątów.	1
	Obliczenie wysokości drzewa $h \approx 10,59 \text{ m}$.	1
10	Sporządzenie rysunku i przyjęcie oznaczeń: a - ramię, b - krótsza podstawa, c - dłuższa podstawa, h - wysokość.	1
	Wyznaczenie wzoru na wysokość trapezu z trójkąta prostokątnego $h = a \sin \alpha$.	1
	Obliczenie długości dłuższej podstawy $c = \frac{a}{\cos \alpha}$.	1
	Obliczenie długości krótszej podstawy $b = \frac{a - 2a \cos^2 \alpha}{\cos \alpha}$.	2
	Obliczenie pola trapezu $P = a^2 \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha$	1
11	Sporządzenie rysunku i przyjęcie oznaczeń.	1
	Wykazanie, że trójkąt jest prostokątny.	1
	Obliczenie pola trójkąta prostokątnego $P_t = 84 \text{ cm}^2$.	1
	Obliczenie długości promienia $r = 3 \text{ cm}$ i pola koła $P_k = 9\pi \text{ cm}^2$.	1
	Obliczenie pola pozostałego materiału $P = P_t - P_k = 84 - 9\pi \approx 55,74 \text{ cm}^2$.	2

Poziom rozszerzony

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania	L. pkt.
1	Wykonanie rysunku i przyjęcie potrzebnych oznaczeń.	1
	Obliczenie pola trójkąta ABC: $P_{\triangle ABC} = 15$.	1
	Zapisanie związku $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot CB \cdot CA \cdot \sin \angle ACB $ i wyprowadzenie zależności $ CB \cdot CA \cdot \sin \angle ACB = 30$.	1
	Wyprowadzenie zależności: $ CE = \frac{1}{3} CA $, $ CF = \frac{1}{4} CB $.	1
	Obliczenie pola trójkąta CEF: $P_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot CF \cdot \sin \angle ACB = \frac{5}{4}$.	1
2	Wykonanie rysunku i przyjęcie potrzebnych oznaczeń. CE wysokość trójkąta ABC opuszczona na bok AB trapezu.	1
	Ze związku $\frac{ AC }{\sin 45^\circ} = \frac{ AB }{\sin 120^\circ}$ obliczenie długości odcinka AB : $ AB = 3\sqrt{6}$. (w tym 1 pkt. za wzory redukcyjne)	2
	Z trójkąta ACE obliczenie długości odcinka CE : $ CE = AC \cdot \cos \angle ACE = 6 \cos 75^\circ$.	1
	Obliczenie długości krótszej podstawy trapezu. Ponieważ $ CE = EB $ wynika, że $ DC = AB - 2 EB = 3\sqrt{6} - 12 \cos 75^\circ$.	1
	Obliczenie pola trapezu. (w tym 1 pkt. za obliczenie $\cos 75^\circ$ lub za obliczenia z pierwiastkami)	2
3	Wykonanie rysunku i przyjęcie potrzebnych oznaczeń.	1
	Obliczenie długości dłuższego boku równoległoboku (w tym 1 pkt. za zapisanie twierdzenia cosinusów i zastosowanie wzoru redukcyjnego): $a = \sqrt{13 + 6\sqrt{3}}$.	2
	Obliczenie długości krótszego boku równoległoboku: $b = \sqrt{13 - 6\sqrt{3}}$.	1
4	Obliczenie długości boku AB : $ AB = 2\sqrt{13}$.	1
	Obliczenie długości boku DE : $ DE = 6\sqrt{2}$.	1
	Wykazanie, że trójkąty ABC i DEF są podobne, bo mają proporcjonalne boki.	1
5	Wykonanie rysunku i przyjęcie potrzebnych oznaczeń. h – wysokość trójkąta opuszczona na bok AB .	1
	Obliczenie długości boku AB : $ AB = 4\sqrt{7}$. (w tym 1 pkt. za zapisanie twierdzenia cosinusów i zastosowanie wzoru redukcyjnego)	2

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania	L. pkt.
5	Z twierdzenia o dwusiecznej kąta w trójkącie $\frac{ AD }{ AC } = \frac{ DB }{ CB }$ obliczenie długości odcinka DB : $ DB = \frac{8\sqrt{7}}{3}$.	1
	Z zastosowania twierdzenia sinusów w trójkącie ABC obliczenie $\sin \angle ABC $: $\sin \angle ABC = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$.	1
	Z zastosowania twierdzenia sinusów w trójkącie DBC obliczenie długości odcinka CD : $ CD = \frac{8}{3}$.	1
6	Sporządzenie rysunku i przyjęcie oznaczeń: a - dłuższa podstawa, b - krótsza, h - wysokość, r - promień, x - odległość wysokości h od początku podstawy a .	1
	Wykorzystanie twierdzenia o czworokącie opisanym na okręgu: $a + b = 3 + 5$.	1
	Wykorzystanie twierdzenia o odcinku łączącym środki ramion trapezu $\frac{a+b}{2} = 4$.	1
	Wyznaczenie wzorów na pola obu trapezów $P_1 = \frac{b + \frac{a+b}{2}}{2} r$, $P_2 = \frac{a + \frac{a+b}{2}}{2} r$.	1
	Zapisanie układu równań $\begin{cases} a + b = 8 \\ \frac{P_1}{P_2} = \frac{5}{11} \end{cases}$.	1
	Rozwiązanie układu równań $a = 7$, $b = 1$.	2
	Zapisanie układu równań do obliczenia wysokości trapezu h z trójkątów prostokątnych $\begin{cases} h^2 + (6-x)^2 = 5^2 \\ h^2 + x^2 = 3^2 \end{cases}$.	1
	Rozwiązanie układu równań $x = \frac{5}{3}$, $h = \frac{2\sqrt{14}}{3}$.	2
7	Obliczenie pola trapezu $P = \frac{8\sqrt{13}}{3} \text{ cm}^2$.	1
	Sporządzenie rysunku i przyjęcie oznaczeń.	1
	Wyznaczenie miary trzeciego kąta $\gamma = 75^\circ$.	1
	Obliczenie długości boku $b = 2\sqrt{3} \text{ cm}$ z tw. sinusów.	1
	Obliczenie wartości $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.	1
	Obliczenie pola trójkąta $P = (6 + 2\sqrt{3}) \text{ cm}^2$.	1