

LOGIKA MATEMATYCZNA

Poziom podstawowy

Zadanie 1 (4 pkt.)

Która koniunkcja jest prawdziwa:

- a) Liczba $\sqrt{64}$ jest niewymierna i $\sqrt{64}$ jest liczbą dodatnią.
 - b) Liczba 0 jest wymierna i 0 jest najmniejszą liczbą całkowitą.
 - c) Liczba 1,(3) jest niewymierna i 1,(3) jest liczbą mniejszą od 1,33.
 - d) Liczba π jest niewymierna i π jest liczbą większą od 3.
- Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 2 (4 pkt.)

Jeśli liczbę 3 wstawisz w miejsce x , to które zdanie będzie prawdziwe:

- a) $x > 2$ i $x + 1 < 4$
- b) $|x| = 3 \Leftrightarrow \sim(x \leq 3)$
- c) $x > 2$ lub $x + 1 < 4$
- d) $x \leq 3 \Rightarrow \sim(|x| = 3)$

Zadanie 3 (12 pkt.)

Dla jakich wartości logicznych p i q prawdziwe jest zdanie:

- a) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$, (6 pkt.)
- b) $(p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$. (6 pkt.)

Zadanie 4 (4 pkt.)

Implikacja o poprzedniku p i następniku q jest fałszywa. Jaka wartość logiczną ma zdanie: $(q \wedge p) \Rightarrow (q \vee (\neg p))$? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 5 (4 pkt.)

Oznaczmy zdania: p – Moja siostra ma kartę rowerową.

q – Mój brat ma nowy rower.

r – Brat podwozi siostrę do szkoły.

Zapisz słownie zdanie: $(q \wedge \neg p) \Rightarrow r$ i podaj jego zaprzeczenie.

Zadanie 6 (3 pkt.)

Oceń wartość logiczną zdań:

- a) Dla każdego współczynnika b równanie $x^2 - bx - 1 = 0$ ma dwa rozwiązania.
- b) Zbiorem rozwiązań nierówności $x^2 - 4x + 10 < 0$ jest zbiór liczb rzeczywistych.
- c) Funkcja $f(x) = x^2 + 4x - 50$ nie przyjmuje wartości największej.

Zadanie 7 (4 pkt.)

Oceń wartość logiczną zdań:

- a) Jeżeli Toruń leży nad Wisłą, to pies jest ssakiem,
- b) $\sqrt{196}$ jest liczbą wymierną i $\sqrt{169}$ jest liczbą wymierną,
- c) $-\sqrt{2} < -2 \vee \sqrt{2} > 2$,
- d) Liczba -5 jest dodatnia wtedy i tylko wtedy, gdy liczba 3 jest ujemna.

Zadanie 8 (3 pkt.)

Oceń wartość logiczną zdania $(p \vee q) \wedge r$, gdy:

$$p : 3 / 222$$

$$q : \sqrt{1\frac{16}{25}} = 1\frac{1}{4}$$

$$r : 86 - 80 = 16$$

Zadanie 9 (4 pkt.)

Oceń prawdziwość poniższych implikacji. Które ze zdań po zastąpieniu symbolu implikacji symbolem równoważności jest zdaniem prawdziwym?

a) $4 / 100 \Rightarrow 4^2 / 100^2$

b) $4 / 10 \Rightarrow 4^2 / 10^2$

c) $9 / 15 \Rightarrow 3 / 15$

d) $3 / 21 \Rightarrow 9 / 21$.

Zadanie 10 (5 pkt.)

Wpisz do tabelki wartość logiczną podanych zdań:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
$\sqrt{625} = 25$	$\sqrt{100} = 10$				
$-5^2 > 2^2$	$(0,2)^2 > (0,5)^2$				
$9 / 11$	$3 / 111$				
91 jest liczbą pierwszą	123 jest liczbą pierwszą				

Zadanie 11 (4 pkt.)

To, czy zdanie $p \Rightarrow [q \vee (\sim p)]$ jest prawem rachunku zdań, można sprawdzić, posługując się następującą tabelą.

p	q	$\sim p$	$q \vee (\sim p)$	$p \Rightarrow [q \vee (\sim p)]$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

W tabeli tej zauważamy, że w drugim wierszu ostatniej kolumny występuje wartość logiczna 0. Oznacza to, że dane zdanie nie jest prawem logicznym.

Postępując w analogiczny sposób, sprawdź, czy zdanie $[q \wedge (\sim p)] \Rightarrow q$ jest prawem rachunku zdań.

Zadanie 12 (5 pkt.)

Iloczyn kolejnych czterech liczb naturalnych jest równy 3024. Wyznacz te liczby.

Zamiast rozwiązania równania $x(x+1)(x+2)(x+3) = 3024$, gdzie x jest najmniejszą z szukanych liczb, przeprowadzamy rozumowanie logiczne:

1. Ponieważ ostatnią cyfrą liczby 3024 nie jest 0, więc liczba 10 nie jest jedną z szukanych liczb.

2. Ponieważ $3024 < 10^4$, więc liczba 3024 jest iloczynem czterech kolejnych liczb naturalnych mniejszych od 10.
3. Ponieważ ostatnią cyfrą liczby 3024 nie jest ani 5, ani 0, więc liczba 5 nie jest jedną z szukanych liczb.

Wniosek z 1. – 3.: jedyne możliwe iloczyny liczb to: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ albo $6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$.

Sprawdzenie:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 42 \cdot 72 = 3024$$

Odp. szukane liczby to: $6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$.

Rozumując logicznie, znajdź cztery kolejne liczby naturalne, których iloczyn jest równy 5040.

Poziom rozszerzony

Zadanie 1 (4 pkt.)

Wiadomo, że równoważność zdań p i q jest prawdziwa oraz ich koniunkcja jest fałszywa. Jaką wartość logiczną ma zdanie: $(p \vee \neg q) \Rightarrow (\neg p)$?

Zadanie 2 (3 pkt.)

Oceń wartość logiczną zdania „Istnieje taka liczba całkowita x , że suma liczby x i odwrotności tej liczby jest równa 2”. Zapisz je używając kwantyfikatorów i symboli matematycznych. Podaj jego negację.

Zadanie 3 (3 pkt.)

Podaj, jakie liczby należy podstawić za zmienną zdaniową, aby otrzymać zdanie prawdziwe, gdy:

- a) n jest liczbą naturalną taką, że: $\sqrt{n} < 3 \wedge 2 / n$,
- b) x jest liczbą całkowitą taką, że: $x^2 > 4 \wedge x^2 = 16$,
- c) x jest liczbą rzeczywistą taką, że: $x^2 = 4 \vee x^2 = 16$.

Zadanie 4 (5 pkt.)

Dane są funkcje zdaniowe:

$$A: x^2 + 1 = (x + 1)^2$$

$$B: x^2 + 1 = (x - 1)(x + 1)$$

$$C: x^2 + 1 = (x + 1)^2 - 2x$$

$$D: x^2 + 1 = (x + 1)^2 - (x - 1)^2$$

Wskaż, które z tych funkcji zdaniowych są:

- a) prawdziwe dla każdej liczby rzeczywistej,
- b) prawdziwe dla pewnej liczby rzeczywistej,
- c) fałszywe dla każdej liczby rzeczywistej.

Zadanie 5 (4 pkt.)

Zdanie „Ania zdała na studia i nieprawdą jest, że jeśli Ewa zdała maturę, to Tomek nie zdał egzaminu gimnazjalnego” jest prawdziwe. Czy prawdą jest, że Ania zdała na studia, Ewa zdała maturę, Tomek zdał egzamin gimnazjalny? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 6 (8 pkt.)

Równoważność zdań r i p jest fałszywa oraz implikacja $(\sim p) \Rightarrow q$ jest fałszywa. Oceń wartość logiczną zdania: $[r \vee \sim (p \wedge q)] \Leftrightarrow [(\sim q) \Rightarrow r]$

SCHEMAT PUNKTOWANIA – LOGIKA

Poziom podstawowy

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania	L. pkt.
1	Podanie wartości logicznej zdania a). Odp: zdanie fałszywe.	1
	Podanie wartości logicznej zdania b). Odp: zdanie fałszywe.	1
	Podanie wartości logicznej zdania c). Odp: zdanie fałszywe.	1
	Podanie wartości logicznej zdania d). Odp: zdanie prawdziwe.	1
2	Podanie wartości logicznej zdania a). Odp: zdanie fałszywe.	1
	Podanie wartości logicznej zdania b). Odp: zdanie fałszywe.	1
	Podanie wartości logicznej zdania c). Odp: zdanie prawdziwe.	1
	Podanie wartości logicznej zdania d). Odp: zdanie fałszywe.	1
3a	Spostrzeżenie faktu: równoważność jest prawdziwa, kiedy zdania $p \wedge q$, $p \Rightarrow q$ są prawdziwe lub fałszywe.	1
	Rozpatrzenie dla jakich wartości logicznych p i q zdanie $p \wedge q$ jest prawdziwe i sprawdzenie czy dla tych samych wartości zdanie $p \Rightarrow q$ też jest prawdziwe.	2
	Rozpatrzenie dla jakich wartości logicznych p i q zdanie $p \Rightarrow q$ jest fałszywe i sprawdzenie czy dla tych samych wartości zdanie $p \wedge q$ też jest fałszywe.	2
	Sformułowanie odpowiedzi: jeżeli p i q są prawdziwe oraz jeżeli p prawdziwe a q fałszywe.	1
3b	Spostrzeżenie faktu: równoważność jest prawdziwa, kiedy zdania $p \vee q$, $p \Rightarrow q$ są prawdziwe lub fałszywe.	1
	Rozpatrzenie dla jakich wartości logicznych p i q zdanie $p \vee q$ jest prawdziwe i sprawdzenie czy dla tych samych wartości zdanie $p \Rightarrow q$ też jest prawdziwe.	2
	Rozpatrzenie dla jakich wartości logicznych p i q zdanie $p \Rightarrow q$ jest fałszywe i sprawdzenie czy dla tych samych wartości zdanie $p \vee q$ też jest fałszywe.	2
	Sformułowanie odpowiedzi: jeżeli p i q są prawdziwe oraz jeżeli p fałszywe a q prawdziwe.	1
4	Spostrzeżenie faktu, że implikacja o poprzedniku p i następniku q jest fałszywa jeżeli zdanie p jest prawdziwe a zdanie q fałszywe.	1
	Wyznaczenie wartości logicznej zdania $q \wedge p$. Odp. Fałszywe.	1
	Wyznaczenie wartości logicznej zdania $q \vee (\neg p)$. Odp. Fałszywe.	1
	Wyznaczenie wartości logicznej implikacji zdań. Odp. Prawdziwe.	1
5	Sformułowanie zdania: Jeśli mój brat ma nowy rower i moja siostra nie ma karty rowerowej, to brat podwozi siostrę do szkoły.	1
	Podanie zaprzeczenia zdania symbolicznie: $(q \vee \sim p) \wedge \sim r$. 1 pkt. – zaprzeczenie wynikania, 1 pkt. – zaprzeczenie koniunkcji.	2
	Sformułowanie zdania: Mój brat ma nowy rower, moja siostra nie ma karty rowerowej i mój brat nie podwozi siostry do szkoły.	1

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania	L. pkt.
6	a) zdanie prawdziwe	1
	b) zdanie fałszywe	1
	c) zdanie fałszywe	1
7	Określenie wartości logicznej zdań. Za każdy podpunkt po 1 pkt.	4
8	Określenie wartości logicznej zdań p, q, r .	1
	Określenie wartości logicznej zdania $(p \vee q) \wedge r$.	2
9	Określenie wartości logicznej implikacji.	4
	Określenie wartości logicznej zdań po zastąpieniu implikacji równoważnością.	4
10	Określenie wartości logicznej zdań p i q .	1
	Określenie wartości logicznej zdań $p \vee q, p \wedge q, p \Rightarrow q, p \Leftrightarrow q$.	4
11	Uzupełnienie trzech pierwszych kolumn odpowiedniej tabeli: $p, q, \sim p$.	1
	Uzupełnienie czwartej kolumny odpowiedniej tabeli: $q \wedge (\sim p)$.	1
	Uzupełnienie piątej kolumny odpowiedniej tabeli: $[q \wedge (\sim p)] \Rightarrow q$.	1
	Stwierdzenie, że podane zdanie jest prawem rachunku zdań.	1
12	Sformułowanie wniosku 1. Ponieważ ostatnią cyfrą liczby 5040 jest 0, więc liczba 10 może być jedną z szukanych liczb.	1
	Sformułowanie wniosku 2. Ponieważ $5040 < 10^4$, więc liczba 5040 jest iloczynem czterech kolejnych liczb naturalnych mniejszych od 10 lub iloczynem 10 i trzech kolejnych liczb naturalnych mniejszych od 10.	1
	Sformułowanie wniosku 3. Ponieważ ostatnią cyfrą liczby 5040 nie jest 5, ale 0, więc liczba 5 może być jedną z szukanych liczb.	1
	Wyznaczenie czwórek liczb spełniających warunki 1. – 3.: 2, 3, 4, 5 lub 5, 6, 7, 8 lub 7, 8, 9, 10.	1
	Sprawdzenie, iloczyn których czterech liczb wynosi 5040 i sformułowanie odpowiedzi: $7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$.	1

Poziom rozszerzony

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania	L. pkt.
1	Spostrzeżenie faktu, że równoważność jest prawdziwa, jeżeli oba zdania są prawdziwe lub fałszywe.	1
	Sprawdzenie dla jakich z wyznaczonych wartości logicznych zdań p i q koniunkcja jest fałszywa. Odp. Oba zdania są fałszywe.	1
	Wyznaczenie wartości logicznej zdania $p \vee (\neg q)$. Odp. Prawdziwe.	1
	Wyznaczenie wartości logicznej implikacji zdań. Odp. Prawdziwe.	1
2	Ocenienie wartości logicznej. Odp.: zdanie prawdziwe.	1
	Zapisanie z użyciem kwantyfikatora: $\exists_{x \in C} x + \frac{1}{x} = 2$.	1
	Zapisanie negacji tego zdania: $\forall_{x \in C} x + \frac{1}{x} \neq 2$	1

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania	L. pkt.
3	Określenie liczb naturalnych n . Odp. $n \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$.	1
	Określenie liczb całkowitych x . Odp. $x \in \{-4, 4\}$.	1
	Określenie liczb rzeczywistych x . Odp. $x \in \{-4, -2, 2, 4\}$.	1
4	Wskazanie funkcji zdaniowych prawdziwych dla każdej liczby rzeczywistej. Odp. C.	1
	Wskazanie funkcji zdaniowych prawdziwych dla pewnej liczby rzeczywistej. Odp. A, C, D.	3
	Wskazanie funkcji zdaniowych fałszywej dla każdej liczby rzeczywistej. Odp. B.	1
5	Zapisanie zdania przy użyciu symboli logicznych.	1
	Analiza zdania (wykorzystanie prawdziwości koniunkcji oraz zaprzeczenia implikacji)	2
	Udzielenie odpowiedzi. Odp. Wszystkie trzy zdania są prawdziwe.	1
6	Określenie wartości logicznych zdań: $w(p) = 0, w(q) = 0, w(r) = 1$	3
	Określenie wartości logicznych koniunkcji, negacji, alternatywy, implikacji, równoważności oraz udzielenie odpowiedzi na pytanie. Odp. Zdanie prawdziwe.	5