

GEOMETRIA ANALITYCZNA

Poziom podstawowy

Zadanie 1 (4 pkt.)

Dana jest prosta k opisana równaniem ogólnym $2x + 3y - 6 = 0$.

- napisz równanie prostej k w postaci kierunkowej.
- podaj współczynnik kierunkowy prostej k .
- Znajdź punkty przecięcia prostej k z osiami układu współrzędnych.

Zadanie 2 (4 pkt.)

Domy trzech kolegów znajdują się w punktach, które można zaznaczyć w układzie współrzędnych: dom Tomka w punkcie $T(1,1)$, dom Jurka w punkcie $J(-2,3)$, zaś dom Piotrka w punkcie $P(0,-2)$.

- Oblicz odległość między domami Jurka i Tomka.
- Które domy są położone najdalej od siebie. Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 3 (4 pkt.)

Narysuj na płaszczyźnie zbiory: A i B (na oddzielnych rysunkach) i zaznacz zbiory $A \cup B$ oraz $A \setminus B$, jeśli:

$$A = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge 2x - y < 3\}$$

$$B = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x + y - 5 \geq 0\}.$$

Zadanie 4 (5 pkt.)

Współrzędne każdego punktu należącego do zbioru A można przedstawić w postaci $(2t - 1, 7 - 4t)$ dla pewnego $t \in \langle -1, 1 \rangle$. Aby zaznaczyć zbiór A na płaszczyźnie, można za

pomocą układu równań $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 7 - 4t \end{cases}$ znaleźć związek między współrzędnymi x i y ,

np. wyznaczając parametr t z pierwszego równania i podstawiając wyznaczone wyrażenie

w miejsce t do drugiego równania: $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 7 - 4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1+x}{2} \\ y = 7 - 4t \end{cases}$ dla $t \in \langle -1, 1 \rangle$.

Mamy więc $y = 7 - 4 \cdot \frac{1+x}{2}$ czyli $y = -2x + 5$.

Zbiór A jest więc odcinkiem zawartym w prostej o równaniu $y = -2x + 5$. Dla końcowych wartości t z przedziału $\langle -1, 1 \rangle$ otrzymujemy punkty: $(-3, 11)$ oraz $(1, 3)$, które są końcami odcinka.

W podobny sposób wyznacz zbiór $B = \{(2t + 1, 3 - 2t) : t \in \langle -2, 1 \rangle\}$.

Zadanie 5 (2 pkt.)

Położenie dwóch braci można opisać w układzie współrzędnych. W pewnej chwili Jacek znajdował się w punkcie $A(-1,3)$, a Tomek w punkcie $B(1,-1)$. Wyznacz równanie prostej, na której znajdowali się bracia i oblicz odległość między nimi.

Zadanie 6 (5 pkt.)

Prosta k jest nachylona do osi OX pod kątem $\alpha = 45^\circ$, przechodzi przez punkt $P(3,1)$ i przecina oś OY w punkcie A . Prosta l jest prostopadła do prostej k , przecina ją w punkcie P , zaś oś OY w punkcie B . Napisz równania prostych k i l , a następnie oblicz pole trójkąta ABP .

Zadanie 7 (7 pkt.)

Pani Kowalska w czasie wakacji robi przetwory z owoców. Kupiła na targu jabłka (w cenie 3 zł za kilogram) i wiśnie (w cenie 4 zł za kilogram). Niech x oznacza liczbę kilogramów jabłek, y – liczbę kilogramów wiśni. Zapisz układ nierówności opisujący następującą sytuację: Liczba kilogramów zakupionych przez panią Kowalską owoców nie przekracza 10 kg, a suma wydanych na nie pieniędzy nie może być większa od 36 zł. Zilustruj zbiór rozwiązań tego układu na płaszczyźnie.

Zadanie 8 (5 pkt.)

Punkty $A(-2,-4)$, $B(2,0)$, $C(1,5)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Wyznacz:

- równania prostych zawierających boki AB i CD ,
- długość wysokości opuszczonej z punktu C na bok AB ,
- pole równoległoboku.

Poziom rozszerzony**Zadanie 1 (6 pkt.)**

Sprawdź, czy prosta $4x + 3y + 3 = 0$

- jest prostopadła do prostej o równaniu $3x + 4y - 7 = 0$;
- jest styczna do okręgu $x^2 - 2x + y^2 - 2y - 2 = 0$.

Zadanie 2 (9 pkt.)

Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A(2,1)$, $B(5,2)$, $C(1,4)$.

- sprawdź, czy trójkąt ABC jest prostokątny;
- wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC .

Zadanie 3 (6 pkt.)

Zaznacz w układzie współrzędnych zbiory A , B oraz $A \cap B$ i $B \setminus A$, jeśli:

$$A = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge (x-3)^2 + (y+2)^2 \leq 9\}$$
$$B = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge |y-x| < 2\}.$$

Zadanie 4 (5 pkt.)

Wykaż, że zbiorem punktów równoodległych od prostej $y = 5$ i punktu $O(0, 0)$ jest parabola o równaniu $y = -\frac{1}{10}x^2 + 2\frac{1}{2}$.

Zadanie 5 (9 pkt.)

Dany jest trójkąt ABC , w którym $A(-3, 1)$, $\vec{AB} = [5, 3]$, a środek ciężkości ma współrzędne $S(-1, -1)$.

- Znajdź współrzędne pozostałych wierzchołków trójkąta.
- Wyznacz obraz punktu A w symetrii względem prostej zawierającej bok BC .

Zadanie 6 (12 pkt.)

Punkty $A(0, -5)$ i $B(4, -2)$ są kolejnymi wierzchołkami rombu $ABCD$. Wierzchołek C należy do prostej o równaniu $x + y - 9 = 0$.

- Znajdź współrzędne punktów C i D .
- Oblicz sinus kąta ostrego i pole rombu $ABCD$.
- Napisz równanie okręgu wpisanego w ten romb.

Zadanie 7 (1 pkt.)

Środkiem okręgu jest punkt $S(-1, 2)$, a styczna do okręgu ma równanie $3x + 4y + 5 = 0$. Oblicz długość promienia tego okręgu.

Zadanie 8 (14 pkt.)

Dane są odcinki o długościach $a = 2x + 1$, $b = 3 - y$, $c = x + 2y$. Opisz za pomocą układu nierówności zbiór tych wszystkich punktów (x, y) , dla których z odcinków o długościach a, b , i c można zbudować trójkąt. Zaznacz ten zbiór w układzie współrzędnych. Czy punkt $A(3, 1)$ spełnia ten warunek?

Zadanie 9 (8 pkt.)

Dla jakich wartości parametru p iloczyn zbiorów A i B jest zbiorem pustym, jeżeli

$$A = \{(x, y): x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 - 6x \leq +2y + 8 \leq 0\}$$

$$B = \{(x, y): x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x - y + p < 0\}.$$

Dla najmniejszej znalezionej wartości parametru p przedstaw interpretację geometryczną.

SCHEMAT PUNKTOWANIA – GEOMETRIA ANALITYCZNA

Poziom podstawowy

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
1	Przekształcenie prostej k do postaci kierunkowej: $y = -\frac{2}{3}x + 2$.	1
	Zapisanie współczynnika kierunkowego: $a = -\frac{2}{3}$.	1
	Wyznaczenie punktu przecięcia prostej k z osią x : $(3, 0)$ oraz z osią y : $(0, 2)$.	2
2	Obliczenie odległości między punktami J i T : 5 [j].	1
	Obliczenie odległości między punktami J i P : $\sqrt{29}$ [j].	1
	Obliczenie odległości między punktami T i P : $\sqrt{5}$ [j].	1
	Wskazanie, które domy są położone najdalej od siebie. Odp. Dom Jurka i Piotrka, ponieważ $\sqrt{29} > \sqrt{5}$ i $\sqrt{29} > 5$	1
3	Wyznaczenie zbioru A .	1
	Wyznaczenie zbioru B .	1
	Wyznaczenie sumy zbiorów A i B .	1
	Wyznaczenie różnicy zbiorów A i B .	1
4	Ułożenie odpowiedniego układu równań: $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3 - 2t \end{cases}$	1
	Wyznaczenie parametru t z pierwszego równania: $\begin{cases} t = \frac{x-1}{2} \text{ dla} \\ y = 3 - 2t \end{cases}$ $t \in \langle -2, 1 \rangle$.	1
	Podstawienie wyznaczonej wartości t do drugiego równania: $y = 4 - x$.	1
	Wyznaczenie punktów, które są końcami odcinka: $(-3, 7)$ i $(3, 1)$.	2
5	Wyznaczenie równania prostej przechodzącej przez punkty A i B : $y = -2x + 1$.	1
	Obliczenie odległości między punktami A i B : $ AB = 2\sqrt{5}$.	1
6	Wyznaczenie równania prostej k : $y = x - 2$.	1
	Wyznaczenie współrzędnych punktu A : $(0, -2)$	1
	Wyznaczenie równania prostej l : $y = -x + 4$.	1
	Wyznaczenie współrzędnych punktu B : $(0, 4)$.	1
	Obliczenie pola trójkąta ABP : 9[j ²]	1
7	Utworzenie układu nierówności: $\begin{cases} x + y \leq 10 \\ 3x + 4y \leq 36 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$	$\left. \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ \\ \end{matrix} \right\} 1$
	Ilustracja zbioru rozwiązań układu na płaszczyźnie	4

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
8	Wyznaczenie równania prostej AB : $y = x - 2$.	1
	Wyznaczenie równania prostej CD : $y = x + 4$.	1
	Wyznaczenie długości wysokości opuszczonej z wierzchołka C na bok AB : $3\sqrt{2}$	1
	Obliczenie długości boku AB : $4\sqrt{2}$	1
	Obliczenie pola równoległoboku: $P = 24 [j^2]$	1

Poziom rozszerzony

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
1	Wyznaczenie współczynników kierunkowych obu prostych: $a = -\frac{4}{3}$, $a = -\frac{3}{4}$.	1
	Porównanie współczynników i stwierdzenie, że proste nie są prostopadłe.	1
	Wyznaczenie współrzędnych środka okręgu.	1
	Wyznaczenie długości promienia okręgu.	1
	Obliczenie odległości środka okręgu od prostej $4x + 3y + 3 = 0$.	1
	Porównanie odległości środka okręgu od prostej z długością promienia okręgu i stwierdzenie, że prosta jest styczna do okręgu.	1
2	Obliczenie długości boków trójkąta: $ AB = \sqrt{10}$, $ BC = 2\sqrt{5}$, $ AC = \sqrt{10}$.	3
	Sprawdzenie, czy długości boków trójkąta spełniają twierdzenie Pitagorasa	1
	Napisanie układu trzech równań: podstawienie współrzędnych wierzchołków trójkąta do równania okręgu w postaci ogólnej.	1
	Rozwiązanie układu równań, wyznaczenie współczynników: $a = 3$, $b = 3$, $c = 13$.	3
	Wyznaczenie równania okręgu: $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 13 = 0$.	1
3	Odczytanie współrzędnych środka długości promienia okręgu.	1
	Zaznaczenie na płaszczyźnie zbioru A .	1
	Zapisanie nierówności $ y - x < 2$ w postaci koniunkcji: $y < x + 2$ i $y > x - 2$.	1
	Zaznaczenie na płaszczyźnie zbioru B .	1
	Zaznaczenie zbiorów $A \cap B$ i $A \setminus B$.	2
4	Zapisanie założenia: $k: y = 5$, $P(x, y)$ – dowolny punkt płaszczyzny spełniający warunek $d(p, k) = OP $ i tezy: $y = -\frac{1}{10}x^2 + 2\frac{1}{2}$.	1
	Przeprowadzenie dowodu: $d(p, k) = OP \Leftrightarrow 5 - y = \sqrt{x^2 + y^2}$. Obie strony nierówności są nieujemne, więc można każdą z nich podnieść do kwadratu. Otrzymane równanie wystarczy przekształcić do postaci $y = -\frac{1}{10}x^2 + 2\frac{1}{2}$	4

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
5	Wyznaczenie współrzędnych punktu B : $B(2, 4)$.	1
	Wyznaczenie współrzędnych środka odcinka AB (punktu M): $M = (-\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$.	1
	Wyznaczenie współrzędnych punktu C z własności środka ciężkości $\vec{CS} = 2 \cdot \vec{SM}$, $C = (-2, -8)$.	2
	Znalezienie równania prostej BC : $3x - y - 2 = 0$.	1
	Znalezienie równania prostej prostopadłej do BC przechodzącej przez punkt A : $x + 3y = 0$.	1
	Wyznaczenie współrzędnych punktu przecięcia obu prostych: $P = (\frac{3}{5}, -\frac{1}{5})$	1
	Wyznaczenie współrzędnych punktu A' (z równości wektorów $\vec{AP} = \vec{PA'}$)	2
6	Zauważenie, że punkt C ma współrzędne $(x, 9 - x)$, dla pewnego $x \in R$.	1
	Skorzystanie z własności rombu: $ AB = BC $ w celu wyznaczenia x .	3
	Wyznaczenie współrzędnych punktu D z równości wektorów $\vec{AB} = \vec{DC}$.	2
	Obliczenie $\sin \alpha$ (z tw. cosinusów lub z def. funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym).	2
	Obliczenie pola rombu.	1
	Znalezienie współrzędnych środka okręgu, jako środek przekątnej AC i przekątnej BD . Odp.: $S = (\frac{7}{2}, -\frac{3}{2})$.	1
	Obliczenie długości promienia okręgu, jako odległość punktu S od jednego z boków. Odp.: $r = 0,7$.	1
	Zapisanie równania okręgu o środku S promieniu r : $(x - \frac{7}{2})^2 + (y + \frac{3}{2})^2 = 0,49$.	1
7	Obliczenie długości promienia okręgu, czyli odległości środka okręgu od stycznej $r = 2$.	1
8	Skorzystanie z nierówności trójkąta i założenie, że długość każdego odcinka jest liczbą dodatnią: $\begin{cases} 2x + 1 > 0 \\ y < 3 \\ x + 2y > 0 \\ x - 3y + 4 > 0 \\ 3x + 3y - 2 > 0 \\ -x + y + 2 > 0 \end{cases}$	7
	Zaznaczenie zbioru punktów, których współrzędne spełniają dany układ nierówności.	6
	Sprawdzenie, że punkt $A = (3, 1)$ nie spełnia tego układu nierówności.	1

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
9	Stwierdzenie, że zbiór A jest kołem o środku $S = (x_s, y_s) = (3, -1)$ i promieniu $r = \sqrt{2}$.	2
	Stwierdzenie, że zbiór B jest półpłaszczyzną z wyłączoną prostą, zbiory A i B są rozłączne, gdy dana prosta jest styczną (k) do koła i środek koła nie należy do półpłaszczyzny określonej nierównością $x - y + p < 0$ lub dana prosta znajduje się powyżej stycznej k .	1
	Wyznaczenie równania stycznej k spełniającej warunek: $y = x + p \quad \wedge \quad d(S, k) = r \quad \wedge \quad x_s - y_s + p > 0$. Odp.: $p = -2$.	2
	Wyznaczenie zbioru parametrów spełniających warunki zadania: $p \geq -2$.	1
	Przedstawienie interpretacji geometrycznej dla $p = -2$.	2