

FUNKCJA WYMIERNA

Poziom podstawowy

Zadanie 1

Wykonaj działania i podaj niezbędne założenia:

a) $\frac{4}{a+2} + \frac{3}{a-2} - \frac{a+1}{a^2-4}$; (3 pkt.)

b) $\left(x+1 - \frac{4x}{x+1}\right)\left(x-1 + \frac{4x}{x-1}\right)$; (4 pkt.)

c) $\frac{m^2-36}{m^2-4} : \frac{m^2-6m}{m+2}$. (3 pkt.)

Zadanie 2 (3 pkt.)

Oblicz wartość liczbową wyrażenia $\frac{(x-4y)(x-2y)-(x-2y)^2}{(2x-y)(2x+y)-(2x+y)^2}$ dla $x=1,2$ $y=1\frac{1}{2}$.

Zadanie 3 (6 pkt.)

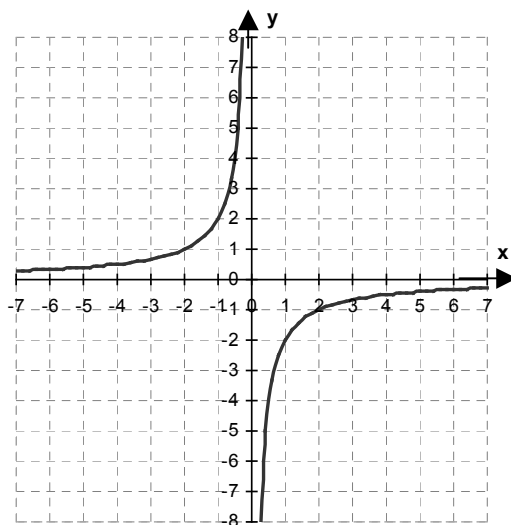
Funkcja f określona jest wzorem: $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$.

- Określ dziedzinę i zbiór wartości tej funkcji.
- Wyznacz miejsce zerowe funkcji f .
- Naszkicuj wykres funkcji f .
- Określ przedziały monotoniczności funkcji f .

Zadanie 4 (5 pkt.)

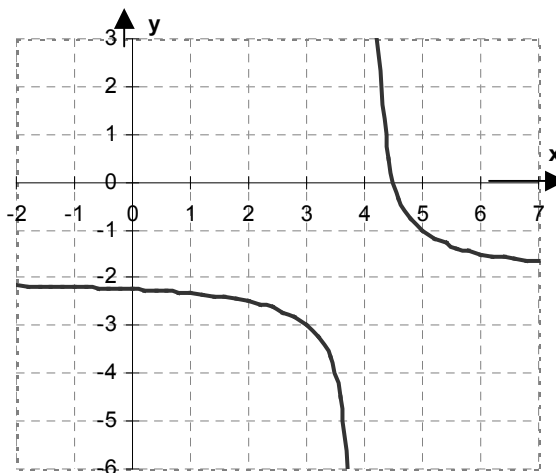
Na rysunku został przedstawiony wykres pewnej proporcjonalności odwrotnej f .

- Napisz wzór funkcji f .
- Dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje wartość $-\frac{1}{3}$?
- Oblicz dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości mniejsze od 1?



Zadanie 5 (4 pkt.)

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f , której wzór ma postać $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. Wyznacz współczynniki: a, b, c, d .

**Zadanie 6**

Rozwiąż równania:

a) $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1} = 0$, (3 pkt.)

b) $\frac{2x-1}{x} = \frac{3}{x+1}$. (3 pkt.)

Zadanie 7 (5 pkt.)

Rozwiąż nierówność $\frac{2}{x} < \frac{5}{17}$ i podaj najmniejszą liczbę naturalną należącą do zbioru rozwiązań tej nierówności.

Zadanie 8 (3 pkt.)

Pole prostokąta jest równe $6m^2$. Napisz wzór funkcji wyrażającej zależność między długością i szerokością tego prostokąta. Sporządź jej wykres.

Zadanie 9 (3 pkt.)

Chcemy sfotografować ropuchę z odległości $x = 1,8$ m. Ogniskowa soczewki w obiektywie naszego aparatu jest równa 9 cm. Jak daleko musi być odsunięta soczewka obiektywu od powierzchni filmu, jeśli chcemy otrzymać ostre zdjęcie? Do rozwiązania zadania skorzystaj ze wzoru $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f}$, gdzie x to odległość przedmiotu od środka soczewki, y odległość od środka soczewki do obrazu, a f ogniskowa soczewki.

Zadanie 10 (4 pkt.)

Dwa samochody wyruszyły jednocześnie z miasta A. Po pewnym czasie pierwszy znajdował się 320 km od tego miasta, a drugi 240 km. Średnia prędkość drugiego samochodu była

o 20 km/h mniejsza od prędkości pierwszego. Znajdź średnie prędkości z jakimi poruszały się samochody.

Zadanie 11 (6 pkt.)

Wiele wyrażeń wymiernych można przedstawić jako sumę ułamków zwanych prostymi.

Np. wyrażenie $\frac{3x+1}{x^2+x}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ przedstawiamy w innej równoważnej postaci w następujący sposób:

1. Rozkładamy mianownik na czynniki: $x^2 + x = x(x+1)$.
2. Zapisujemy ułamek w postaci: $\frac{3x+1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$. (*)
3. Mnożymy obie strony przez $x(x+1)$ i otrzymujemy $3x+1 = A(x+1) + Bx$, a po uporządkowaniu otrzymujemy $3x+1 = (A+B)x + A$.
4. Przyrównujemy współczynniki przy jednakowych potęgach x w obu stronach otrzymanej tożsamości i otrzymujemy układ równań z niewiadomymi A, B :
$$\begin{cases} A+B=3 \\ A=1 \end{cases}$$
.
5. Rozwiązanie układu: $A=1, B=2$.
6. Podstawiamy wyznaczone wartości stałych A, B do wyrażenia (*) i otrzymujemy:
$$\frac{3x+1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x+1}.$$

Postępując analogicznie rozłóż na ułamki proste wyrażenie wymierne $\frac{5-5x}{x^2-x-6}$.

Zadanie 12 (5 pkt.)

Sporządź wykres funkcji homograficznej $f(x) = \frac{ax+b}{x-2}$, wiedząc, że do wykresu tej funkcji należą punkty $A = (0,3)$, $B = (-2,1)$.

Zadanie 13 (5 pkt.)

Wykres funkcji $f(x) = \frac{3}{x}$ przesunięto o dwie jednostki w prawo wzdłuż osi x i o jedną jednostkę w dół wzdłuż osi y .

- a) Sporządź wykres tej funkcji.
- b) Podaj wzór tej funkcji w postaci $g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$.
- c) Wyznacz miejsce zerowe tej funkcji.

Zadanie 14 (6 pkt.)

Sprawdź, czy rozwiązania równania $x+1 = \frac{2}{x}$ należą do zbioru rozwiązań nierówności

$$\frac{3x-5}{x+2} < \frac{1}{2}.$$

Poziom rozszerzony

Zadanie 1 (10 pkt.)

Sporządź wykres funkcji: $y = \frac{|x-3|}{x+2}$. Na podstawie wykresu odpowiedz:

- a) Dla jakiego argumentu funkcja ta przyjmuje wartość $\frac{3}{2}$?
- b) Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości mniejsze od -1 ?

Zadanie 2 (4 pkt.)

Rozwiąż nierówność $\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2} > 0$, dla $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 3 (7 pkt.)

Rozwiąż nierówność: $\frac{2x-5}{|x-1|} \leq 1$.

Zadanie 4 (8 pkt.)

- a) Sporządź wykres funkcji $f(x) = \left| \frac{4}{|x|} - 2 \right|$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- b) Określ liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m .
- c) Narysuj wykres funkcji $y = g(m)$, podającej liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m .

Zadanie 5 (8 pkt.)

Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = \frac{ax-b}{x-2}$, gdzie

$a = [\operatorname{tg}^2 30^\circ + (1 - \sin 45^\circ)(1 + \sin 45^\circ)] \cdot \operatorname{ctg}^2 125^\circ + \frac{49}{18}$, b jest większym pierwiastkiem równania $x^3 - 9x^2 - x + 9 = 0$. Dla wyznaczonych wartości a i b sporządź wykres funkcji $y = f(|x|)$.

Zadanie 6 (5 pkt.)

Dla jakiej wartości parametru m wartość ułamka $\frac{x^2 - mx + 1}{x^2 + x + 1}$ jest większa od -3 dla każdego $x \in \mathbb{R}$?

Zadanie 7 (6 pkt.)

Dla jakich a i b funkcje $f(x) = 1 + \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-3}$ oraz $g(x) = \frac{x^2 - 13}{x^2 - 2x - 3}$ są równe?

Zadanie 8 (3 pkt.)

Wyznacz największą wartość funkcji $g(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 15}$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 9 (5 pkt.)

Gdy jest otwarty kran na ciepłą wodę, to napełnienie całej wanny trwa o 7 minut dłużej, niż gdy jest otwarty kran na zimną wodę. Jeśli obydwa krany są otwarte, to napełnienie pustej wanny odbywa się w czasie 12 minut. Ile czasu potrzeba na napełnienie pustej wanny, gdy odkręcony jest tylko kran na zimną wodę?

Zadanie 10 (7 pkt.)

Funkcja $F(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 9x - 18}{x + 3a}$ dla argumentu 1 przyjmuje wartość 3. Wyznacz:

- a) wartość parametru a ,
- b) miejsca zerowe funkcji F ,
- c) zbiór tych argumentów, dla których funkcja osiąga wartości nieujemne.

SCHEMAT PUNKTOWANIA - FUNKCJA WYMIERNA

Poziom podstawowy

Zadanie	Etapy rozwiązania zadania	L. pkt.
1 a	Określenie założeń: $a \neq 2$ i $a \neq -2$	1
	Sprowadzenie wyrażeń do wspólnego mianownika.	1
	Doprowadzenie wyrażenia do postaci: $\frac{6a-3}{a^2-4}$.	1
1 b	Określenie założeń: $x \neq 1$ i $x \neq -1$	1
	Doprowadzenie wyrażeń w każdym nawiasie do najprostszej postaci.	2
	Wykonanie mnożenia dwóch ułamków i doprowadzenie do postaci: $x^2 - 1$.	1
1 c	Określenie założeń: $m \neq 2$ i $m \neq -2$ i $m \neq 0$ i $m \neq 6$.	1
	Doprowadzenie liczników i mianowników do postaci iloczynowych.	1
	Wykonanie określonego działania otrzymując wynik: $\frac{m+6}{m(m-2)}$	1
2	Doprowadzenie wyrażenia do najprostszej postaci z zastosowaniem wzorów skróconego mnożenia lub wyciągnięcie wspólnego czynnika przed nawias: Odp. $\frac{x-2y}{2x+y}$	2
	Obliczenie wartości wyrażenia: $-\frac{6}{13}$	1
3	Doprowadzenie funkcji do postaci: $f(x) = \frac{3}{x-1} + 2$	1
	Określenie dziedziny i zbioru wartości: $D = R \setminus \{1\}, ZW = R \setminus \{2\}$	2
	Wyznaczenie miejsca zerowego funkcji: $-\frac{1}{2}$	1
	Naszkicowanie wykresu funkcji $y = f(x)$	1
	Wyznaczenie przedziałów monotoniczności funkcji: funkcja malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; 1), (1; +\infty)$	1
4	Odczytanie współrzędnych punktu należącego do wykresu np. $(-2; 1)$	1
	Wyznaczenie wzoru funkcji korzystając z faktu, że $f(x) = \frac{a}{x}$ i $f(-2) = 1 \Rightarrow a = f(-2) \cdot (-2)$. Odp. $f(x) = \frac{-2}{x}$	1
	Zapisanie i rozwiązanie odpowiedniego równania. Odp: $x = 6$	1
	Zapisanie i rozwiązanie odpowiedniej nierówności: Odp: $x \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$	2
5	Odczytanie współrzędnych punktu należącego do wykresu np. $(5; -1)$ lub $(3; -3)$	1
	Odczytanie z wykresu równań asymptot i zapisanie wzoru funkcji w postaci kanonicznej $f(x) = \frac{a}{x-4} - 2$.	1

Zadanie	Etapy rozwiązania zadania	L. pkt.
5	Obliczenie a i utworzenie wzoru funkcji w postaci kanonicznej $f(x) = \frac{1}{x-4} - 2$.	1
	Zapisanie wzoru funkcji w postaci ogólnej i odczytanie wartości współczynników a, b, c, d . Odp. $f(x) = \frac{-2x+9}{x-4}$, $a = -2, b = 9, c = 1, d = -4$.	1
6	Określenie dziedziny równania: $x \in R \setminus \{-1, 1\}$	1
	Sprowadzenie równania do równania kwadratowego i wyznaczenie pierwiastków trójmianu: $x_1 = -1, x_2 = 2$	1
	Podanie rozwiązań równania z uwzględnieniem dziedziny: $x = 2$	1
	Podpunkt b) ma taką samą punktację i czynności: Odp. $x_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}, x_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$	3
7	Określenie dziedziny nierówności: $x \in R \setminus \{0\}$	1
	Zapisanie nierówności w postaci równoważnej: $\frac{34-5x}{17x} < 0$	1
	Rozwiązanie nierówności. Odp: $x \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{34}{5}; +\infty\right)$. (1 pkt. za metodę i 1 pkt. za poprawność obliczeń)	2
	Podanie najmniejszej liczby naturalnej należącej do zbioru rozwiązań tej nierówności: 7	1
8	Wprowadzenie oznaczeń: x i y wymiary prostokąta, gdzie $x, y \in R_+$	1
	Utworzenie wzoru funkcji korzystając ze wzoru na pole prostokąta: $y = \frac{6}{x}$	1
	Sporządzenie wykresu tak otrzymanej funkcji.	1
9	Ułożenie równania na podstawie podanego wzoru i danych z treści: $\frac{1}{180} + \frac{1}{y} = \frac{1}{9}$ (uwzględnienie zamiany jednostek)	2
	Rozwiązanie równania: $y = \frac{180}{19} \approx 9,47 \text{ cm}$	1
10	Analiza treści zadania polegająca na wprowadzeniu oznaczeń np. v średnia prędkość pierwszego samochodu oraz $v > 0$	1
	Ułożenie równania z zastosowaniem wzoru $t = \frac{s}{v} : \frac{240}{v} = \frac{320}{v-20}$	1
	Rozwiązanie równania: $v = 80 \text{ km/h}$	1
	Obliczenie prędkości drugiego samochodu $v_1 = 60 \text{ km/h}$.	1
11	Za każdy prawidłowo przeprowadzony krok w postępowaniu po punkcie. Odp. $\frac{5-5x}{x^2-x-6} = \frac{-3}{x+2} + \frac{-2}{x-3}$	6
12	Określenie dziedziny funkcji: $D = R \setminus \{2\}$	1
	Z faktu, że $f(0) = 3$ otrzymanie związku $\frac{b}{-2} = 3$ i obliczenie b : $b = -6$	1

Zadanie	Etapy rozwiązania zadania	L. pkt.
12	Z faktu, że $f(-2) = 1$ otrzymanie związku $\frac{-2a-6}{-2-2} = 1$ i obliczenie a : $a = -1$	1
	Doprowadzenie wzoru funkcji $f(x) = \frac{-x-6}{x-2}$ do postaci kanonicznej $f(x) = \frac{-8}{x-2} - 1$	1
	Naszkicowanie wykresu funkcji $y = f(x)$.	1
13	Naszkicowanie wykresu funkcji najpierw $y = \frac{3}{x}$ a potem $y = g(x)$ jako odpowiednie przesunięcie.	2
	Zapisanie wzoru funkcji w postaci kanonicznej $g(x) = \frac{3}{x-2} - 1$	1
	Doprowadzenie wzoru funkcji do postaci ogólnej $g(x) = \frac{-x+5}{x-2}$.	1
	Wyznaczenie miejsca zerowego funkcji: $x = 5$	1
14	Określenie dziedziny równania: $D = R \setminus \{0\}$ i nierówności: $D = R \setminus \{-2\}$	1
	Rozwiązanie równania poprzez sprowadzenie do równania kwadratowego i wyznaczenie jego pierwiastków: $x_1 = 1$, $x_2 = -2$	1
	Podanie zbioru rozwiązań równania: $x \in \{1; -2\}$	1
	Rozwiązanie nierówności (1 pkt. za metodę i 1 pkt. za poprawność obliczeń). Odp.: $x \in \left(-2; 2\frac{2}{5}\right)$	2
	Sprawdzenie, czy zbiór rozwiązań równania zawiera się w zbiorze rozwiązań nierówności i sformułowanie odpowiedzi. Odp. Zbiór rozwiązań równania nie zawiera się w zbiorze rozwiązań nierówności	1

Poziom rozszerzony

Zadanie	Etapy rozwiązania zadania	L. pkt.
1	Określenie dziedziny funkcji: $D = R \setminus \{-2\}$.	1
	Doprowadzenie funkcji do postaci: $f(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{x+2} & \text{dla } x \geq 3 \\ \frac{-x+3}{x+2} & \text{dla } x < 3 \end{cases}$	1
	Doprowadzenie funkcji do postaci kanonicznej: $f(x) = \begin{cases} \frac{-5}{x+2} + 1 & \text{dla } x \geq 3 \\ \frac{5}{x+2} - 1 & \text{dla } x < 3 \end{cases}$	2
	Naszkicowanie wykresu funkcji $f_1(x) = \frac{-5}{x+2} + 1$ dla $x \geq 3$	2

Zadanie	Etapy rozwiązania zadania	L. pkt.
1	Naszkicowanie wykresu funkcji : $f_2(x) = \frac{5}{x+2} - 1$ dla $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 3)$.	2
	Odczytanie z wykresu, że funkcja ta przyjmuje wartość $\frac{3}{2}$ dla $x = 0$.	1
	Odczytanie z wykresu, że funkcja ta przyjmuje wartości mniejsze od -1 dla $x \in (-\infty; -2)$	1
2	Określenie dziedziny nierówności: $n \in N$	1
	Zapisanie nierówności w postaci równoważnej: $\frac{-1}{(n+1)(n+2)} > 0$	1
	Sprowadzenie nierówności do równoważnej jej postaci: $-1 > 0$	1
	Sformułowanie odpowiedzi: $n \in \emptyset$	1
3	Określenie dziedziny nierówności: $D = R \setminus \{1\}$.	2
	Doprowadzenie nierówności do postaci: $2x - 5 \leq x - 1 $ ponieważ $ x - 1 > 0$.	1
	Uwzględniając wartość bezwzględną doprowadzenie nierówności do postaci: $2x - 5 \leq x - 1$ dla $x > 1$ lub $2x - 5 \leq -x + 1$ dla $x < 1$.	1
	Rozwiązanie otrzymanych nierówności	2
	Sformułowanie odpowiedzi uwzględniając dziedzinę: $x \in (-\infty; 1) \cup (1; 4)$	1
4	Sporządzenie wykresu $y = \frac{4}{ x }$.	2
	Sporządzenie wykresu $y = \frac{4}{ x } - 2$.	1
	Sporządzenie wykresu $y = \left \frac{4}{ x } - 2 \right $.	1
	Odczytanie ze sporządzonego wykresu, że równanie $f(x) = m$: nie ma rozwiązań dla $m \in (-\infty; 0)$, ma dwa rozwiązania dla $m \in \{0\} \cup \langle 2; +\infty \rangle$, ma cztery rozwiązania dla $m \in (0; 2)$	3
	Zapisanie wzoru funkcji $y = g(m)$: $g(m) = \begin{cases} 0 & \text{dla } m \in (-\infty; 0) \\ 2 & \text{dla } m \in \{0\} \cup \langle 2; +\infty \rangle \\ 4 & \text{dla } m \in (0; 2) \end{cases}$ i wykonanie wykresu $y = g(m)$	1
5	Obliczenie wartości a (w tym 1 pkt. za wzór redukcyjny i 1 pkt. za wartości funkcji trygonometrycznych). Odp. $a = 3$.	3
	Wyznaczenie wartości b w wyniku rozwiązania równania metodą grupowania. Odp. $b = 9$.	2
	Zapisanie wzoru funkcji: $f(x) = \frac{3x-9}{x-2}$ w postaci kanonicznej i sporządzenie jej wykresu	2

Zadanie	Etapy rozwiązania zadania	L. pkt.
5	Wykonanie wykresu funkcji: $f(x) = \frac{3 x -9}{ x -2}$ korzystając z własności $y = f(x)$	1
6	Zapisanie nierówności $\frac{x^2 - mx + 1}{x^2 + x + 1} > -3$ i określenie jej dziedziny: $x \in R$	1
	Skoro $x^2 + x + 1 > 0$ dla $x \in R$, to nierówność przyjmuje najpierw postać $x^2 - mx + 1 > -3(x^2 + x + 1)$ a potem $4x^2 + (3 - m)x + 4 > 0$	1
	Zapisanie warunku, że rozwiązaniem ostatniej nierówności są $x \in R$, gdy $\Delta < 0$.	1
	Obliczenie $\Delta = m^2 - 6m - 55$ i rozwiązanie nierówności $\Delta < 0$. Odp.: Dla $m \in (-5; 11)$ wartość ułamka jest większa od -3 .	2
7	Określenie dziedzin funkcji f i g : $D_f = R \setminus \{-1, 3\}$, $D_g = R \setminus \{-1; 3\}$	2
	Zapisanie funkcji f w postaci jednego ułamka: $f(x) = 1 + \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-3} = \frac{x^2 + (a+b-2)x + b-3a-3}{(x+1)(x-3)}$	1
	Skoro we wzorach funkcji f i g mianowniki są takie same, to i postaci liczników muszą być sobie równe co prowadzi do ułożenia układu równań: $\begin{cases} a+b-2=0 \\ b-3a-3=-13 \end{cases}$	1
	Rozwiązanie układu równań i podanie odpowiedzi: dla $a=3$, $b=-1$ funkcje te są równe.	2
8	Spostrzeżenie, że funkcja ta posiada wartość największą kiedy mianownik jest najmniejszy.	1
	Wyznaczenie najmniejszej wartości wyrażenia $x^2 - 2x + 15$: $y_w = \frac{-\Delta}{4a} = 14$	1
	Wyznaczenie największej wartości funkcji g : $g_{Max}(x) = \frac{1}{14}$	1
9	Wprowadzenie oznaczeń: t – czas w minutach potrzebny na napełnienie wanny zimną wodą, $t+7$ to czas napełnienia wanny ciepłą wodą.	1
	Ułożenie równania $\frac{1}{t} + \frac{1}{t+7} = \frac{1}{12}$ i określenie jego dziedziny $t \in (12, +\infty)$	1
	Sprowadzenie do równania kwadratowego $t^2 - 17t - 84 = 0$ i jego rozwiązanie: $t_1 = 21$, $t_2 = -4$	2
	Wybranie rozwiązania uwzględniając wszystkie warunki zadania i podanie odpowiedzi: 21 minut potrzeba na napełnienie pustej wanny, gdy odkręcony jest tylko kran na zimną wodę	1
10	Wyznaczenie parametru a korzystając z faktu, że $F(1) = 3$. Odp. $a = -3$	1
	Wyznaczenie dziedziny funkcji: $x \in R \setminus \{9\}$	1
	Wyznaczenie miejsc zerowych rozwiązując równanie $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$ metodą grupowania. Odp. $x_0 \in \{-3; -2; 3\}$	2

Utworzenie nierówności postaci $\frac{x^3 + 2x^2 - 9x - 18}{x - 9} \geq 0$ i jej rozwiązanie. Odp. $x \in (-\infty; -3) \cup (-2; 3) \cup (9; +\infty)$	3
---	---