FUNKCJA LINIOWA

Poziom podstawowy

Zadanie 1 (4 pkt.)

Funkcja f przechodzi przez punkty $A=\left(-\sqrt{3},-2\right)$ oraz $B=\left(\sqrt{3},4\right)$.

a) Wyznacz wzór funkcji f.
b) Podaj miejsce zerowe funkcji f.
c) Dla jakich x funkcja f przyjmuje wartości większe od –3.

Zadanie 2 (4 pkt.)

Ciśnienie powietrza podgrzewanego w szczelnie zamkniętym naczyniu jest funkcją liniową jego temperatury. W tabeli przedstawiono wyniki dwóch bardzo dokładnych pomiarów.

Temperatura [w °C]	10	20
Ciśnienie [w hPa]	962,21	996,21

a) Wyznacz wzór tej zależności.
b) Wyznacz miejsce zerowe otrzymanej funkcji.
c) Pod jakim kątem prosta będąca wykresem tej funkcji przecina oś odciętych?

Zadanie 3 (3 pkt.)

Dana jest prosta l o równaniu $y=-\frac{2}{3}x+2\sqrt{3}$ oraz punkt A = (4, –3). Wykres funkcji liniowej f jest prostopadły do prostej l, punkt A należy do wykresu funkcji f. Wyznacz:

a) wzór funkcji f,
b) miejsce zerowe funkcji f.

Zadanie 4 (3 pkt.)

Pewna spółka produkuje długopisy. Funkcja f określona wzorem $f(x)=0{,}5x+300$ podaje łączny dzienny koszt działalności formy w zależności od liczby x wyprodukowanych długopisów (300 zł to koszty stałe). Funkcja g określona wzorem $g(x)=1{,}25x$ wyraża łączny przychód ze sprzedaży długopisów. Ile długopisów należy dziennie produkować, przy założeniu, że wszystkie zostaną sprzedane, by ich produkcja była opłacalna?

Zadanie 5 (3 pkt.)

Równanie postaci $C=\frac{5}{9}\cdot F-\frac{160}{9}$, ustala zależność między temperaturą, wyrażoną w stopniach Celsjusza (C) oraz Fahrenheita (F).

a) Oblicz ile stopni w skali Fahrenheita, ma wrząca w temperaturze 100° C woda.
b) Wyznacz taką temperaturę, przy której liczba stopni w skali Celsjusza jest równa liczbie stopni w skali Fahrenheita.

Zadanie 6 (4 pkt.)

Listwa ma długość 3,15 m. Z części listwy stolarz wykonał ramkę do obrazu w kształcie prostokąta, której wymiary różniły się o 15 cm. Pozostała część listwy wystarczyła jeszcze na ramkę o wymiarach dwa razy mniejszych. Oblicz wymiary obydwu ramek.

Zadanie 7 **(4 pkt.)**
Obliczyć cenę dyskietki i taśmy do drukarki, wiedząc, że taśma jest o 12zł droższa od dyskietki, a za pięć dyskietek i taśmę zapłacono 33zł.

Zadanie 8 **(4 pkt.)**
Pan Anatol na autostradzie osiąga swoim samochodem średnią prędkość 120 km/h, na pozostałych drogach 50 km/h. Ile kilometrów przejechał autostradą pan Anatol, jeśli na trasę o tej samej długości poza autostradą potrzebowałby dodatkowo 3,5 godziny?

Zadanie 9 **(3 pkt.)**
Aby obliczyć odsetki od kapitału bankowcy stosują następujący wzór:

$$odsetki = liczba \quad dni \quad lokaty \quad \cdot \frac{kapital \cdot oprocentowanie}{liczba \quad dni \quad w \quad roku}$$

UWAGA: W zależności od banku przyjmuje się, że liczba dni w roku równa się 360 lub 365. Notuje się wówczas odsetki $_{360}$ albo odsetki $_{365}$.
Dysponujesz kapitałem 10 000 złotych, który chciałeś ulokować na 60 dni. W dwóch różnych bankach oprocentowanie jest takie samo i równa się 15%, zaś liczbę dni w roku jeden bank przyjmuje jako 360, drugi jako 365. Stosując powyższy wzór oblicz odsetki od podanego kapitału w każdym z tych banków. Która lokata jest korzystniejsza i o ile złotych?

Zadanie 10 **(6 pkt.)**
Na przejechanie 50 km samochód zużywa 4,5 litra benzyny.
a) Ile kilometrów przejedzie samochód, mając w baku 12,6 litra benzyny?
b) Ile litrów benzyny potrzebuje ten samochód na przejechanie 252 km?
c) Napisz wzór wyrażający zużycie paliwa w litrach w zależności od liczby x przebytych przez samochód kilometrów.

Zadanie 11 **(4 pkt.)**
Napisz wzór funkcji liniowej, do wykresu, której należą punkty $A = (-3;4)$, $B = (0{,}5;0{,}5)$. Czy punkt $C = (0;-2)$ należy do wykresu tej funkcji?

Zadanie 12 **(4 pkt.)**
Narysuj wykres funkcji oraz podaj jej miejsca zerowe

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{dla} \quad x \in (-\infty;-2) \\ -x & \text{dla} \quad x \in \langle -2;1 \rangle \\ 1 & \text{dla} \quad x \in (1;+\infty) \end{cases}$$

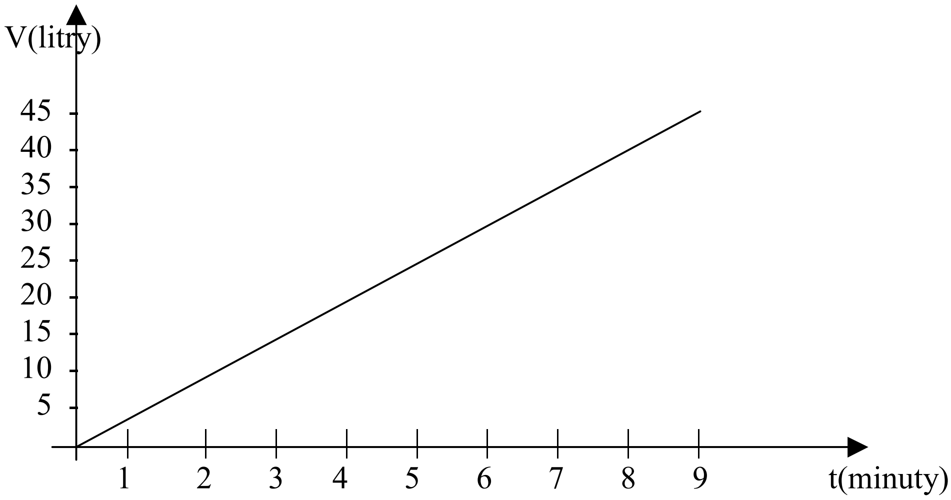
Zadanie 13 **(3 pkt.)**

Rozwiąż równanie: $x - \dfrac{0{,}5x - \frac{3+x}{4}}{2} = 3 - \dfrac{1 - \frac{6-x}{3}}{4}$.

Zadanie 14 **(5 pkt.)**

Rozwiąż układ nierówności: $\begin{cases} 2(x-1)^2 - (x-1)(x+4) > x^2 - 4x + 2 \\ x(x+3) - (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) \geq x + 0{,}5 \end{cases}$.

Zadanie 15 **(6 pkt.)**
Na rysunku przedstawiony jest wykres ilustrujący proces wypełniania wodą basenu o pojemności 45 litrów.



Odpowiedz na pytania:
a) Ile litrów wody znajdowało się w basenie w 6 minucie?
b) Po jakim czasie w pojemniku było 40 litrów wody?
c) Napisz wzór funkcji określający zależność ilości wody w basenie od czasu.

Poziom rozszerzony

Zadanie 1 **(5 pkt.)**
Dane jest równanie postaci $a^2 \cdot x - 1 = x + a$, w którym niewiadomą jest x. Zbadaj liczbę rozwiązań tego równania, w zależności od parametru a.

Zadanie 2 **(4 pkt.)**
Zbadać dla jakich wartości parametru m równanie $(m+1)x = m^2 - 1$:
a) ma jedno rozwiązanie;
b) ma nieskończenie wiele rozwiązań;
c) nie ma rozwiązań.

Zadanie 3 **(4 pkt.)**
Rozwiąż równanie: $\sqrt{x^2 - 8x + 16} = \left((-2)^{0,5}\right)^4$.

Zadanie 4 **(4 pkt.)**
Dla jakich wartości parametru m dana funkcja $f(x) = (3 - |2m-1|)x + 4$ jest rosnąca?

SCHEMAT PUNKTOWANIA - FUNKCJA LINIOWA

Poziom podstawowy

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania	L. pkt.
1	Zapisanie układu równań lub podstawienie danych do wzoru: $\begin{cases} 4 = a\sqrt{3} + b \\ -2 = -a\sqrt{3} + b \end{cases}$ (lub $y - 4 = \frac{-2-4}{-\sqrt{3}-\sqrt{3}}\left(x - \sqrt{3}\right)$).	1
	Wyznaczenie wzoru funkcji: $f(x) = \sqrt{3}x + 1$.	1
	Wyznaczenie miejsca zerowego funkcji *f*: $a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.	1
	Wyznaczenie, dla jakich x funkcja f przyjmuje wartości większe od –3: $x > \frac{-4\sqrt{3}}{3}$.	1
2	Zapisanie układu równań lub podstawienie danych do wzoru: $\begin{cases} 962{,}21 = 10a + b \\ 996{,}21 = 20a + b \end{cases}$ (lub $y - 961{,}21 = \frac{996{,}21 - 962{,}21}{20 - 10}(x - 10)$).	1
	Wyznaczenie wzoru zależności: $f(t) = 3{,}4t + 928{,}21$.	1
	Wyznaczenie miejsca zerowego funkcji *f*: t = –273°.	1
	Wyznaczenie kąta, pod jakim prosta będąca wykresem tej funkcji przecina oś odciętych: α = 73° 36’.	1
3	Podanie równania rodziny prostych prostopadłych do prostej l (za wyznaczenie współczynnika kierunkowego przyznajemy 1p): $y = \frac{3}{2}x + b$.	1
	Wyznaczenie wartości współczynnika *b*: *b* = –9.	1
	Wyznaczenie miejsca zerowego funkcji *f*: *x* = 6.	1
4	Wyznaczenie funkcji zysku: $z(x) = g(x) - f(x) = 0{,}75x - 300$.	1
	Zapisanie nierówności pozwalającej obliczyć ile długopisów należy dziennie produkować, by ich produkcja była opłacalna: 0,75x – 300 > 0.	1
	Obliczenie, ile długopisów należy dziennie produkować, by ich produkcja była opłacalna: x > 400.	1
5	Rozwiązanie równania z jedną niewiadomą *F*: *F* = 212.	1
	Zapisanie równania z jedną niewiadomą: $F = \frac{5}{9} \cdot F - \frac{160}{9}$ (lub $C = \frac{5}{9} \cdot C - \frac{160}{9}$).	1
	Rozwiązanie równania: *F* = –40 lub (*C* = –40).	1
6	Analiza zadania.	1
	Zapisanie równania: $2a + 2(a - 15) + 2 \cdot \frac{a}{2} + 2 \cdot \frac{a-15}{2} = 315$.	1
	Rozwiązanie równania: *a = 60cm*	1
	Podanie odpowiedzi: wymiary ramek 60cm i 45cm oraz 30cm i 22,5cm.	1

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania	L. pkt.
7	Analiza zadania.	1
	Zapisanie równania: $5x + x + 12 = 33$.	1
	Rozwiązanie równania: $x = 3,5$.	1
	Podanie odpowiedzi: cena dyskietki 3,50 zł, taśmy 15,50 zł.	1
8	Analiza zadania (wykorzystanie wzoru na prędkość).	1
	Zapisanie równania: $t_1 \cdot 120 = (t_1 + 3,5) \cdot 50$.	1
	Rozwiązanie równania (obliczenie czasu, którego pan Anatol potrzebował do przejechania drogi autostradą): $t_1 = 2,5$h.	1
	Obliczenie długości drogi przejechanej autostradą: $s_1 = 300$ km.	1
9	Obliczenie odsetek w banku, w którym liczba dni w roku przyjmowana jest jako 360: 250 złotych.	1
	Obliczenie odsetek w banku, w którym liczba dni w roku przyjmowana jest jako 365: 246,58 złotych.	1
	Podanie odpowiedzi: korzystniejsza o 3,42 zł jest lokata w banku, w którym liczba dni w roku przyjmowana jest jako 360.	1
10	Zapisanie równania pozwalającego obliczyć ile kilometrów można przejechać mając w baku 12,6 litra benzyny: np. $4,5x = 50 \cdot 12,6$.	1
	Obliczenie ilości kilometrów, jakie można przejechać mając 12,6 litra benzyny: 140km.	1
	Zapisanie równania pozwalającego obliczyć ile litrów benzyny potrzeba na przejechanie 252 km: np. $50y = 252 \cdot 4,5$.	1
	Obliczenie ilości benzyny potrzebnej do przejechania 252 km: 22,68l.	1
	Zapisanie równania pozwalającego wyznaczyć wartość współczynnika a we wzorze wyrażającym zużycie paliwa w litrach ($f(x) = ax$) w zależności od liczby x przebytych przez samochód kilometrów: np. $4,5 = 50a$.	1
	Obliczenie a i zapisanie wzoru wyrażającego zużycie paliwa w litrach w zależności od liczby x przebytych przez samochód kilometrów np: $f(x) = 0,09x$.	1
11	Zapisanie układu równań w celu wyznaczenia współczynników a i b we wzorze funkcji liniowej: np. $\begin{cases} 4 = -3x + b \\ 0,5 = 0,5x + b \end{cases}$.	1
	Wyznaczenie współczynników a i b oraz zapisanie wzoru funkcji liniowej: $y = -x + 1$.	2
	Sprawdzenie czy współrzędne punktu C spełniają równanie prostej.	1
12	Sporządzenie wykresu funkcji dla x ϵ (-∞;-2).	1
	Sporządzenie wykresu funkcji dla x ϵ $\langle -2;1 \rangle$.	1
	Sporządzenie wykresu funkcji dla x ϵ (1;+∞).	1
	Wyznaczenie miejsc zerowych funkcji.	1
13	Przekształcenie proporcji do postaci liniowej. Wymnożenie wyrażeń z nawiasu przez liczbę, redukcja wyrażeń podobnych.	2
	Wyznaczenie wartości x; $x = 3$.	1

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania	L. pkt.
14	Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia .	1
	Przeprowadzenie redukcji wyrażeń podobnych i doprowadzenie układu do postaci: $\begin{cases} ax > b \\ cx \geq d \end{cases}$.	1
	Wyznaczenie rozwiązania każdej nierówności: $\left(x > -\frac{3}{4}; x \leq \frac{4}{3} \right)$.	2
	Wyznaczenie części wspólnej rozwiązań obu nierówności: $x \in \left(-\frac{3}{4}; \frac{4}{3} \right\rangle$.	1
15	Odczytanie z wykresu ile litrów wody znajdowało się w basenie w 6 minucie: 30 litrów.	1
	Odczytanie z wykresu, po jakim czasie w pojemniku było 40 litrów wody: po 8 minutach.	1
	Wybranie dwóch punktów należących do wykresu funkcji: np. (0; 0) i (8; 40) i zapisanie układu równań w celu wyznaczenia współczynników a i b we wzorze funkcji liniowej: np. $\begin{cases} 0 = 0t + b \\ 40 = 8t + b \end{cases}$.	1
	Wyznaczenie wartości a i b oraz podstawienie ich do wzoru $V(t) = at + b$: $a = 5, b = 0;$ $V(t) = 5t$.	2
	Określenie dziedziny	1

Poziom rozszerzony

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania	L. pkt.
1	Przekształcenie danego równania $x(a^2 - 1) = a + 1$.	1
	Zapisanie warunków, w zależności od ilości rozwiązań równania.	1
	Sprawdzenie, kiedy równanie nie posiada rozwiązania: $a = 1$.	1
	Sprawdzenie, kiedy równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań: $a = -1$.	1
	Sprawdzenie, kiedy równanie posiada dokładnie jedno rozwiązanie: $a \neq -1$ i $a \neq 1$.	1
2	Ułożenie warunków.	1
	Sprawdzenie, kiedy równanie posiada dokładnie jedno rozwiązanie: $m \neq -1$.	1
	Sprawdzenie, kiedy równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań: $m = -1$.	1
	Sprawdzenie, kiedy równanie nie posiada rozwiązania: $m \in \varnothing$.	1

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania	L. pkt.
3	Przekształcenie obu stron nierówności do postaci: $\sqrt{(x-a)^2} = b$.	1
	Zastąpienie zapisu $\sqrt{(x-a)^2}$ wartością bezwzględną $\mid x - a \mid$, w wyniku, czego otrzymujemy równanie postaci $\lvert x-a \rvert = b$.	1
	Rozwiązanie równania z wartością bezwzględną korzystając z równoważności: $\lvert x-a \rvert = b \Leftrightarrow (x-a=b \text{ lub } x-a=-b)$.	1
	Zapisanie zbioru rozwiązań równania: $x \in \{0; 8\}$.	1
4	Zapisanie warunku wskazującego, kiedy funkcja liniowa rośnie: $3-\lvert 2m-1 \rvert > 0$.	1
	Doprowadzenie nierówności do postaci $\lvert 2m-1 \rvert < 3$.	1
	Doprowadzenie nierówności do postaci $-3 < 2m-1 < 3$.	1
	Rozwiązanie nierówności podwójnej: $m \in (-1, 2)$.	1