

CIĄGI LICZBOWE

Poziom podstawowy

Zadanie 1 (4 pkt.)

Dany jest ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{n+10}{n+2}$, $n \in N_+$. Czy istnieje wyraz tego ciągu, który jest równy $\frac{3}{2}$? Wyznacz $a_{n+2} - a_n$.

Zadanie 2 (6 pkt.)

Marek chce przekopać swój przydomowy ogródek. Pierwszego dnia przekopał 27 m^2 . Aby przyspieszyć pracę, postanowił każdego następnego dnia przekopywać o 4 m^2 więcej niż poprzedniego. W ciągu ilu dni zakończy pracę, jeśli powierzchnia ogródka wynosi $7,83 \text{ a}$?

Zadanie 3 (6 pkt.)

Rozwiążemy równanie: $4 + 8 + 12 + \dots + x^2 = 8320$.

Możemy to robić w następujący sposób.

Zauważmy najpierw, że lewa strona jest sumą pewnej liczby wyrazów ciągu arytmetycznego.

Oznaczmy:

$$t = x^2,$$

n – liczba składników sumy po lewej stronie równania.

Wówczas, korzystając ze wzorów dla ciągu arytmetycznego, mamy: $t = 4 + (n-1) \cdot 4$,

$$8320 = \frac{4+t}{2} \cdot n.$$

Rozwiązując układ równań:
$$\begin{cases} t = 4 + 4(n-1) \\ \frac{4+t}{2} \cdot n = 8320 \end{cases}$$
 otrzymujemy:
$$\begin{cases} t = 256 \\ n = 64 \end{cases}$$
. Zatem $x^2 = 256$, skąd

$$x = 16 \text{ lub } x = -16.$$

Wykorzystując powyższe rozumowanie, rozwiąż równanie:

$$86 + 82 + 78 + 74 + \dots + (x^2 + 3x - 2) = 968.$$

Zadanie 4 (2 pkt.)

Dane są liczby: $a = \sqrt{3} - 1$, $b = 2(2 - \sqrt{3})$, $c = 2(3\sqrt{3} - 5)$. Czy liczby a , b , c mogą być trzema pierwszymi wyrazami ciągu geometrycznego?

Zadanie 5 (4 pkt.)

Marek wpłacił do banku 2000 zł na lokatę terminową. Roczna stopa procentowa w tym banku wynosi $3,6\%$, a bank kapitalizuje odsetki co kwartał. Czy po 4 latach od momentu wpłacenia suma, jaką wypłaci bank Markowi będzie większa od wpłaconej o $15,4\%$? Odpowiedź uzasadnij. Nie uwzględniaj podatku od odsetek bankowych.

Zadanie 6 (6 pkt.)

Wyznamy te wyrazy ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{n^2 + 10}{n^2 - 3}$, które są wyrazami całkowitymi.

Możemy to zrobić w następujący sposób.

Zauważmy najpierw, że $\frac{n^2 + 10}{n^2 - 3} = \frac{n^2 - 3 + 13}{n^2 - 3} = 1 + \frac{13}{n^2 - 3}$. Aby ostatnie wyrażenie było liczbą całkowitą, mianownik ułamka musi być równy jednej z liczb: 1, -1, 13, -13. Mamy zatem $n^2 - 3 = 1$ lub $n^2 - 3 = -1$ lub $n^2 - 3 = 13$ lub $n^2 - 3 = -13$. Oczywiście interesują nas tylko te rozwiązania tych równań, które należą do zbioru liczb naturalnych. Są nimi: $n = 2$ oraz $n = 4$. Tak więc tylko wyrazy a_2 i a_4 są liczbami całkowitymi.

Wykorzystując powyższe rozumowanie, wyznacz te wyrazy ciągu o wyrazie ogólnym

$$a_n = \frac{2n^2 - 11}{n^2 - 2}, \text{ które są liczbami całkowitymi.}$$

Zadanie 7 (5 pkt.)

W pewnym ciągu arytmetycznym (a_n) mamy: $a_1 + a_5 = 16$ oraz $a_3 + a_9 = 46$. Czy liczba $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{133}$ jest podzielna przez 41?

Zadanie 8 (4 pkt.)

Dany jest ciąg $a_n = 7 - \frac{2n}{5}$.

- Znajdź setny wyraz tego ciągu.
- Którym wyrazem tego ciągu jest $2\frac{3}{5}$?
- Ile wyrazów dodatnich ma ten ciąg?

Zadanie 9 (5 pkt.)

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = 2n^2 + 2n - 3$.

- Zbadaj monotoniczność tego ciągu.
- Miedzy którymi kolejnymi wyrazami tego ciągu różnica jest równa 48?

Zadanie 10 (4 pkt.)

Znajdź liczbę x , dla której liczby $x, x+3, 16$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.

Zadanie 11 (3 pkt.)

Liczby $2x^3 + 9x, x^2 + x, -3x - 4$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Oblicz x .

Zadanie 12 (3 pkt.)

Dane są dwa ciągi (a_n) i (b_n) . Ciąg (a_n) określony jest wzorem ogólnym $a_n = \binom{n+3}{n+1}$,

natomiast $b_n = \sqrt{2}n^2 - n$. Oblicz $a_4 \cdot b_2$.

Zadanie 13 (3 pkt.)

Liczby 102, 105, 108, 111, ..., są kolejnymi początkowymi wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego (a_n) . Zapisz wzór ogólny na n -ty wyraz tego ciągu. Oblicz sumę szesnastu początkowych, kolejnych wyrazów tego ciągu.

Zadanie 14 (5 pkt.)

Wszystkie liczby naturalne dwucyfrowe, podzielne przez 6 są kolejnymi wyrazami pewnego ciągu rosnącego.

- a) Zapisz wzór ogólny na n -ty wyraz tego ciągu.
- b) Oblicz, ile wyrazów ma ten ciąg.
- c) Oblicz sumę piętnastu początkowych kolejnych wyrazów tego ciągu.

Zadanie 15 (4 pkt.)

Aby rozwiązać równanie

$$1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + 32x^5 = 0,$$

można wykorzystać wiadomości dotyczące ciągu geometrycznego.

Zauważmy najpierw, że lewa strona równania jest sumą sześciu początkowych kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego, w którym $a_1 = 1$ i $q = 2x$. Stwierdzamy ponadto, że liczba

$\frac{1}{2}$ nie spełnia tego równania. Stosując wzór na sumę wyrazów ciągu geometrycznego

przekształcamy równanie wyjściowe do postaci $\frac{1 - (2x)^6}{1 - 2x} = 0$, stąd otrzymujemy równanie

$(2x)^6 = 1$, którego rozwiązaniami są liczby $x_1 = \frac{1}{2}$ oraz $x_2 = -\frac{1}{2}$. Ponieważ wiemy, że liczba

$\frac{1}{2}$ nie jest rozwiązaniem danego równania, stwierdzamy ostatecznie, że rozwiązaniem

równania wyjściowego jest liczba $\frac{1}{2}$.

Stosując analogiczny sposób rozumowania, rozwiąż równanie:

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 = 0.$$

Zadanie 16 (4 pkt.)

Bank przyznał Mieczysławowi Mieciowi 20000 zł kredytu oprocentowanego na 9% w stosunku rocznym. Kredyt ma być spłacany przez 4 lata w równych miesięcznych ratach. Oblicz wysokość comiesięcznej raty.

Poziom rozszerzony**Zadanie 1 (5 pkt.)**

Dany jest ciąg, określony następująco:
$$\begin{cases} a_1 = 9 \\ a_n = a_{n-1} + 8n, \end{cases} \text{ dla } n > 1.$$

Znajdź i udowodnij wzór na wyraz ogólny tego ciągu.

Można to zrobić następująco. Najpierw wypiszmy kilka pierwszych wyrazów tego ciągu: $a_1 = 3^2$, $a_2 = 5^2$, $a_3 = 7^2$. Przypuszczamy więc, że dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ zachodzi $a_n = (2n + 1)^2$.

Udowodnimy to metodą indukcji matematycznej.

1°. Na mocy określenia ciągu $a_1 = 9 = (2 \cdot 1 + 1)^2$, więc wzór nasz jest prawdziwy dla $n = 1$.

2°. Wykażemy, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ i $k \geq 1$ z faktu, że $a_k = (2k + 1)^2$ wynika, że

$$a_{k+1} = (2k + 3)^2.$$

Dowód (indukcyjny): Zauważmy, że $L_T = a_{k+1} = a_k + 8(k+1)$ (z określenia ciągu).

Dalej, na mocy założenia indukcyjnego, mamy więc:
 $L_T = (2k+1)^2 + 8(k+1) = 4k^2 + 4k + 1 + 8k + 8 = 4k^2 + 12k + 9 = (2k+3)^2 = P_T$. Na mocy zasady indukcji matematycznej wnioskujemy, że dla dowolnego $n \in N, n \geq 1$ zachodzi $a_n = (2n+1)^2$, co kończy dowód.

Wykorzystując powyższe rozumowanie znajdź i udowodnij wzór na wyraz ogólny ciągu, określonego następująco:
$$\begin{cases} a_1 = 25 \\ a_n = a_{n-1} + 8n + 8 \end{cases} \text{ dla } n > 1.$$

Zadanie 2 (4 pkt.)

Oblicz granice:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n + 3} - \sqrt{n^2 + 3n + 2}),$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n+1} - 5 \cdot 4^{n+2}}{2^{2n+1} + 3^{n-2}}.$

Zadanie 3 (6 pkt.)

Wyznacz zbiór rozwiązań nierówności

$$\frac{x}{1-x} + \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 + \left(\frac{x}{1-x}\right)^3 + \dots < 1.$$

Zadanie 4 (5 pkt.)

Udowodnij, że jeżeli miary trzech kolejnych kątów czworokąta wpisanego w okrąg tworzą ciąg arytmetyczny, to co najmniej dwa kąty tego czworokąta są proste.

Zadanie 5 (6 pkt.)

Wyznacz wartości a i b tak, aby ciąg $-2, a^2, b^3, -20$ miał tę własność, że trzy jego pierwsze wyrazy stanowią trzy kolejne wyrazy pewnego ciągu geometrycznego, zaś trzy ostatnie – trzy kolejne wyrazy pewnego ciągu arytmetycznego.

Zadanie 6 (8 pkt.)

W pewnym ciągu geometrycznym różnica kwadratów pierwszego i drugiego wyrazu wynosi 12, zaś różnica kwadratów pierwszego i trzeciego wyrazu 15. Znajdź piąty wyraz tego ciągu.

Zadanie 7 (7 pkt.)

Wyznacz wszystkie $x \in \langle 0; \pi \rangle$, dla których liczby $\sin^2 x$, $\sin^2 x + \cos^2 x$, $\sin^2 x + 2\cos^2 x$ są trzema kolejnymi początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego, w którym suma czterech pierwszych wyrazów jest równa 6.

Zadanie 8 (6 pkt.)

Wyznacz wszystkie wartości x , dla których liczby: $9, 3^x + \frac{2}{9}, 9^x$ są trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.

Zadanie 9 (4 pkt.)

Wykaż, że jeżeli (a_n) jest ciągiem geometrycznym o wyrazach dodatnich, to ciąg (b_n) o wyrazie ogólnym $b_n = \log_5 a_n$ jest ciągiem arytmetycznym.

Zadanie 10 (5 pkt.)

Wyznacz wszystkie wartości x , dla których pierwszy, drugi i czwarty wyraz nieskończonego ciągu geometrycznego $(x, 1, \dots)$ są trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

Zadanie 11 (6 pkt.)

Udowodnij stosując zasadę indukcji matematycznej że, dla każdego całkowitego, dodatniego n zachodzi równość: $2 + 5 + 8 + \dots + (3n - 1) = \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$.

Zadanie 12 (5 pkt.)

Suma n początkowych, kolejnych wyrazów ciągu (a_n) , jest obliczona według wzoru $S_n = n^2 + 3n$ ($n \in N^+$). Wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

Zadanie 13 (11 pkt.)

Rozwiąż nierówność $\frac{1}{2^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{8^x} + \dots - 0,9 < 0$, gdzie lewa strona tej nierówności jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego.

Zadanie 14 (5 pkt.)

Zbadaj monotoniczność ciągu o wyrazie ogólnym:

$$a_n = \frac{n^2 - 7n + 10}{\sqrt{n^2 + 3n + 3} - \sqrt{n + 2}}$$

SCHEMAT PUNKTOWANIA – CIĄGI LICZBOWE

Poziom podstawowy

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
1	Ułożenie równania $\frac{n+10}{n+2} = \frac{3}{2}$.	1
	Rozwiązanie równania.	1
	Wyznaczenie wyrazu a_{n+2} .	1
	Wyznaczenie $a_{n+2} - a_n = -\frac{16}{n^2 + 6n + 8}$.	1
2	Zamiana arów na metry.	1
	Określenie a_1 i r .	1
	Zapisanie sumy n wyrazów ciągu arytmetycznego $S_n = n(25 + 2n)$.	1
	Zapisanie nierówności i wyznaczenie jej dziedziny $n(25 + 2n) > 783, n \in N_+$.	1
	Rozwiązanie nierówności.	1
	Sformułowanie poprawnej odpowiedzi: w ciągu 15 dni.	1
3	Przyjęcie oznaczenia $t = x^2 + 3x - 2$.	1
	Utworzenie układu równań $\begin{cases} t = 90 - 4n \\ 968 = \frac{86+t}{2} \cdot n \end{cases}$, gdzie n – liczba składników po lewej stronie.	2
	Rozwiązanie układu: $\begin{cases} t = 2 \\ n = 22 \end{cases}$.	2
	Obliczenie x . Odp. $x = 4$ lub $x = 1$.	1
4	Zapisanie warunku wykorzystującego własność ciągu geometrycznego.	1
	Sprawdzenie, że zachodzi równość: $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$.	2
5	Obliczenie kwartalnego oprocentowania: $0,9\% = 0,009$.	1
	Obliczenie kwoty, jaką wypłaci bank $K = 2000(1 + 0,009)^{16} \approx 2308,28$ [zł].	2
	Obliczenie 15, 4% kwoty 2000 zł i udzielenie poprawnej odpowiedzi (tak).	1
6	Przekształcenie do postaci $a_n = 2 - \frac{7}{n^2 - 2}$.	1
	Wskazanie, że w mianowniku ułamka mogą być liczby 1, -1, 7, -7 (dzielniki liczby 7).	1
	Utworzenie i rozwiązanie równań.	2
	Wyznaczenie szukanych wartości n i sformułowanie poprawnej odpowiedzi (a_1 i a_3).	2

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
7	Utworzenie układu równań z niewiadomymi a_1 i r .	1
	Wyznaczenie a_1 i r .	2
	Wyznaczenie sumy 133 wyrazów ciągu.	1
	Wykazanie, że jest ona podzielna przez 41.	1
8	Obliczenie setnego wyrazu ciągu: $a_{100} = -33$.	1
	Obliczenie wartości n , dla której $a_n = 2\frac{3}{5}$: $n = 11$.	1
	Zapisanie układu warunków: $\begin{cases} a_n > 0 \\ n \in N_+ \end{cases}$ i podanie poprawnej odpowiedzi: 17 wyrazów.	2
9	Wyznaczenie wyrazu $a_{n+1} = 2n^2 + 6n + 1$.	1
	Wyznaczenie różnicy $a_{n+1} - a_n = 4n + 4$.	1
	Zapisanie odpowiedzi uwzględniającej założenie $n \in N_+$: badany ciąg jest rosnący.	1
	Zapisanie i rozwiązanie warunku $a_{n+1} - a_n = 48$: $n = 11$.	1
	Podanie poprawnej odpowiedzi: między a_{11} a a_{12} .	1
10	Wykorzystanie własności ciągu geometrycznego i ułożenie równania: np. $\frac{x+3}{x} = \frac{16}{x+3}$.	1
	Wyznaczenie dziedziny równania.	1
	Doprowadzenie równania do postaci: $x^2 - 10x + 9 = 0$.	1
	Rozwiązanie otrzymanego równania: $x = 1$ lub $x = 9$.	1
11	Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego i ułożenie równania: np. $(x^2 + x) - (2x^3 + 9x) = (-3x - 4) - (x^2 + x)$.	1
	Doprowadzenie równania do postaci: $(x-1)(x^2 + 2) = 0$.	1
	Rozwiązanie otrzymanego równania: $x = 1$.	1
12	Wyznaczenie a_4 : $a_4 = 21$.	1
	Wyznaczenie b_2 : $b_2 = 4\sqrt{2} - 2$.	1
	Obliczenie iloczynu $a_4 \cdot b_2$: $a_4 \cdot b_2 = 84\sqrt{2} - 42$.	1
13	Wyznaczenie różnicy r ciągu arytmetycznego: $r = 3$.	1
	Wyznaczenie wzoru na n -ty wyraz ciągu (a_n) : $a_n = 99n - 3$ dla $n \in N_+$.	1
	Obliczenie sumy: $S_{16} = 1932$.	1
14	Zauważenie, że pierwszy wyraz ciągu jest równy 12, zaś różnica równa się 6.	1
	Zapisanie wzoru na n -ty wyraz tego ciągu: $a_n = 6n + 6$ dla $n \in N_+$.	1
	Wyznaczenie największej liczby dwucyfrowej podzielnej przez 6: 96.	1
	Wyznaczenie ilości wyrazów ciągu spełniającego warunki zadania: $n = 15$.	1
	Obliczenie sumy: $S_{15} = 810$.	1

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
15	Zauważenie, że lewa strona równania jest sumą ośmiu początkowych kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego, w którym $a_1 = 1$ i $q = x$.	1
	Przekształcenie równania do postaci $\frac{1-(x)^8}{1-x} = 0$ i zapisanie założenia $x \neq 1$.	1
	Rozwiązanie równania: $x = 1$ lub $x = -1$.	1
	Wybranie odpowiedzi uwzględniającej założenie: $x = -1$.	1
16	Obliczenie miesięcznego oprocentowania: $\frac{3}{4} \% = 0,0075$.	1
	Wyznaczenie ilości rat $n=48$.	1
	Zapisanie wzoru: $R = 20000 \cdot 0,0075 \cdot \frac{(1,0075)^{48}}{(1,0075)^{48} - 1}$.	1
	Obliczenie wysokości comiesięcznej raty: $R = 497,70$ zł.	1

Poziom rozszerzony

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
1	Wypisanie kilku pierwszych wyrazów.	1
	Zapisanie hipotezy dotyczącej szukanego wzoru $a_n = (2n + 3)^2$ dla dowolnego $n \in N_+$.	1
	Udowodnienie wzoru metodą indukcji matematycznej.	3
2	Rozszerzenie różnicy (w punkcie a)) o sumę identycznych pierwiastków.	1
	Obliczenie granicy $(-\frac{1}{2})$.	1
	Przekształcenie ułamka (w punkcie b)) z wykorzystaniem działań na potęgach.	1
	Obliczenie granicy (-40).	1
3	Zauważenie, że lewa strona nierówności jest sumą szeregu geometrycznego, obliczenie jej i zapisanie nierówności z wykorzystaniem obliczonej sumy $\frac{x}{1-2x} < 1$.	1
	Wyznaczenie dziedziny nierówności $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.	3
	Wyznaczenie rozwiązania nierówności.	2
	Podanie rozwiązania nierówności z uwzględnieniem jej dziedziny $(x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right))$.	1

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
4	Analiza zadania (rysunek i oznaczenia).	1
	Wykorzystanie własności czworokąta wpisanego w okrąg do utworzenia jednego z równań $\alpha + r + \beta = \alpha + \alpha + 2r$, gdzie α , $\alpha + r$, $\alpha + 2r$ – miary trzech kolejnych kątów, których mowa w zadaniu, β – miara czwartego kąta.	1
	Wykorzystanie własności sumy miar kątów czworokąta do utworzenia drugiego równania $\alpha + \alpha + r + \alpha + 2r + \beta = 360^\circ$.	1
	Zauważenie, że z powyższych równań wynika, że $\beta = \alpha + r = 90^\circ$.	1
	Uzasadnienie, że istnieją co najmniej dwa kąty proste. Dla $r > 0$ są dokładnie dwa, a dla $r = 0$ są cztery.	1
5	Analiza zadania.	1
	Ułożenie układu równań $\begin{cases} \frac{a^2 - 20}{2} = b^3 \\ a^4 = -2b^3 \end{cases}$	2
	Rozwiązanie równania $a^4 + a^2 - 20 = 0$.	2
	Obliczenie b i podanie odpowiedzi: $\begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} a = -2 \\ b = -2 \end{cases}$.	1
6	Utworzenie układu równań $\begin{cases} a_1^2(1 - q^2) = 12 \\ a_1^2(1 - q^4) = 15 \end{cases}$	2
	Podanie założeń: $q \neq 1, q \neq -1$.	1
	Rozwiązanie układu $\begin{cases} a_1 = 4 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a_1 = -4 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a_1 = 4 \\ q = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a_1 = -4 \\ q = -\frac{1}{2} \end{cases}$	4
	Obliczenie piątego wyrazu ciągu: $\frac{1}{4}$ lub $-\frac{1}{4}$.	1
7	Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego i ułożenie równania: $\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{\sin^2 x + \sin^2 x + 2\cos^2 x}{2}$.	1
	Podanie rozwiązania równania uwzględniającego dziedzinę: $x \in \langle 0, \pi \rangle$.	1
	Wyznaczenie różnicy ciągu arytmetycznego: $r = \sin^2 x$.	1
	Wyznaczenie czwartego wyrazu ciągu arytmetycznego: $a_4 = \sin^2 x + 3\cos^2 x$.	1
	Wyznaczenie sumy: $S_4 = 2 \cdot (2\sin^2 x + 3\cos^2 x)$.	1
	Doprowadzenie równania $2 \cdot (2\sin^2 x + 3\cos^2 x) = 6$ do postaci $\sin x = 0$.	1
	Rozwiązanie równania: $x = k\pi \wedge k \in \mathbb{C}$.	1
	Wybór rozwiązania spełniającego warunki zadania: $x = 0 \vee x = \pi$.	1

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
8	Wykorzystanie własności ciągu geometrycznego i ułożenie równania: $\left(3^x + \frac{2}{9}\right)^2 = 9 \cdot 9^x$.	1
	Przekształcenie równania wykładniczego do postaci: $162(3^x)^2 - 9 \cdot 3^x - 1 = 0$.	1
	Podstawienie: $3^x = t$ i zapisanie równania za pomocą t .	1
	Rozwiązanie równania: $t = -\frac{1}{18} \vee t = \frac{1}{9}$.	1
	Wybór rozwiązania z uwzględnieniem warunku, że $t > 0$: $t = \frac{1}{9}$.	1
	Rozwiązanie równania $3^x = \frac{1}{9}$ i zapisanie odpowiedzi: $x = -2$.	1
9	Zapisanie założeń: $a_n > 0$, $q > 0$ dla $n \in N_+$ i wyznaczenie $b_{n+1} = \log_5 a_{n+1}$.	1
	Zastosowanie definicji ciągu geometrycznego, twierdzenia dotyczącego działań na logarytmach i wyznaczenie różnicy $b_{n+1} - b_n = \log_5 q$.	2
	Zauważenie, że $\log_5 q \in R$ i napisanie wniosku.	1
10	Określenie dziedziny równania.	1
	Wyznaczenie czwartego wyrazu nieskończonego ciągu geometrycznego: $\frac{1}{x^2}$.	1
	Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego i ułożenie równania: $1 = \frac{x + \frac{1}{x^2}}{2}$.	1
	Doprowadzenie równania do postaci: $(x-1)(x^2 - x - 1) = 0$.	1
	Podanie odpowiedzi: $x = 1 \vee x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.	1
11	Sprawdzenie, że dla $n = 1$ zachodzi równość.	1
	Zapisanie założenia indukcyjnego: $2 + 5 + 8 + \dots + (3k-1) = \frac{3}{2}k^2 + \frac{1}{2}k$, gdzie k jest ustaloną liczbą naturalną większą lub równą 1.	1
	Zapisanie tezy indukcyjnej: $2 + 5 + 8 + \dots + (3k-1) + (3k+2) = \frac{3}{2}(k+1)^2 + \frac{1}{2}(k+1)$.	1
	Przeprowadzenie dowodu tezy indukcyjnej.	2
	Sformułowanie odpowiedzi.	1
12	Zapisanie, że $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$.	1
	Wyznaczenie $a_{n+1} = 2n + 4$.	1
	Obliczenie n -tego wyrazu ciągu: $a_n = 2n + 2$.	1

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
12	Zapisanie różnicy dwóch dowolnych, kolejnych wyrazów tego ciągu: $r = a_{n+1} - a_n$.	1
	Obliczenie różnicy ciągu i stwierdzenie, że ciąg jest arytmetyczny.	1
13	Obliczenie ilorazu $q = \frac{1}{2^x}$.	1
	Rozwiązanie nierówności $\left \frac{1}{2^x} \right < 1 : x > 0$.	2
	Zapisanie lewej strony nierówności jako sumy szeregu geometrycznego: $\frac{1}{2^x - 1}$.	1
	Zamiana ułamka $0, (9) = 1$.	1
	Podstawienie $2^x = t \wedge t > 0$.	1
	Zapisanie nierówności za pomocą t : $\frac{1}{t-1} > t - 1, t \neq 1$.	1
	Rozwiązanie nierówności: $t \in (-\infty, 0) \cup (1, 2)$.	2
	Wybór rozwiązania spełniającego warunki zadania: $2^x \in (1, 2)$.	1
	Rozwiązanie nierówności $1 < 2^x < 2$ i podanie odpowiedzi: $x \in (0, 1)$.	1
14	Usunięcie niewymierności z mianownika.	1
	Stwierdzenie i uzasadnienie, że mianownik jest liczbą dodatnią dla dowolnego $n \in N_+$.	2
	Zbadanie znaku licznika.	1
	Sformułowanie stąd wniosku: ciąg nie jest monotoniczny.	1